5 Penktoji paskaita. TIESINIŲ DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ SPRENDIMO BŪDAI. BERNULIO LYGTYS

1. Tiesinių DL sprendimo būdai: Bernulio ir Oilerio metodai.

2. Bernulio diferencialinės lygtys. Jų ypatingieji sprendiniai.

3. Bernulio DL sprendimas.

Bernulio metodas. Šis metodas taip pat sudarytas iš dviejų žingsnių:

1) (2.16) tiesinės diferencialinės lygties sprendinio ieškome kaip dviejų funkcijų $u = u(x)$ ir $v = v(x)$ sandaugos, t. y.

$$y = uv.$$

Tada

$$y' = u'v + uv'.$$

Šias išraiškas įrašome į (2.16) diferencialinę lygtį. Turime:

$$u'v + uv' + p(x)uv = f(x)$$

arba

$$u'v + u\,(v' + p(x)v) = f(x). \tag{5.1}$$

Funkciją v parenkame taip, kad galiotų lygybė

$$v' + p(x)v = 0.$$

Spręsdami šią lygtį, randame

$$v = C\,\mathrm{e}^{-\int p(x)dx},$$

čia C – bet kuri konstanta. Fiksuojame vieną funkciją v, pavyzdžiui tą, kai $C = 1$:

$$v = \mathrm{e}^{-\int p(x)dx}. \tag{5.2}$$

2) Funkcijos v išraišką įrašome į (5.1) lygtį:

$$u'\,\mathrm{e}^{-\int p(x)dx} = f(x),$$

kurią spręsdami surandame funkciją u:

$$u = \int f(x)\,\mathrm{e}^{\int p(x)dx}dx + C. \tag{5.3}$$

Sudauginę (5.2) ir (5.3) funkcijų išraiškas ($y = uv$), gauname bendrąjį (2.16) diferencialinės lygties sprendinį:

$$y = \mathrm{e}^{-\int p(x)dx}\left(\int f(x)\,\mathrm{e}^{\int p(x)dx}dx + C\right).$$

Oilerio metodas. Spręsdami (2.16) diferencialinę lygtį šiuo metodu, perrašome ją taip:

$$(p(x)y - f(x))\,dx + dy = 0.$$

Pažymime

$$M = p(x)y - f(x), \quad N = 1.$$

Tada šios lygties integruojantysis daugiklis yra

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{\int p(x)dx}.$$

Nagrinėjamą lygtį padauginę iš integruojančio daugiklio, sudarome pilnųjų diferencialų lygtį, kurią išsprendę gausime tokią pačią sprendinio išraišką, kokią esame gavę tiek Lagranžo, tiek Bernulio metodu. Skaitytojui siūlome skaičiavimus atlikti savarankiškai.

Į tiesines lygtis yra pertvarkomos ir tiesines lygtis primenančios Bernulio lygtys.

5.1 Apibrėžimas. Diferencialinė lygtis, kurios bendroji išraiška yra

$$y' + p(x)y = f(x)y^{\alpha}, \tag{5.4}$$

vadinama Bernulio lygtimi.

Kai $\alpha = 0$, tai (5.4) yra tiesinė diferencialinė lygtis; kai $\alpha = 1$, tai (5.4) lygtis yra tiesinė homogeninė ir jos kintamuosius galima atskirti. Visais kitais atvejais turime Bernulio lygtį, kurią keitiniu

$$z = y^{1-\alpha}$$

galima pertvarkyti į tiesinę diferencialinę lygtį (tvirtinimo teisingumu siūlome įsitikinti savarankiškai), o tokių lygčių sprendimo būdai jau buvo aptari šiame skyrelyje. Kai $\alpha > 0$, tai Bernulio lygties sprendinys yra ir tiesė $y = 0$.