6 Šeštoji savaitė. Funkcijos išvestinė

Šioje paskaitoje nagrinėjami klausimai:

1. Funkcijos išvestinės apibrėžimas.

2. Funkcijos išvestinės geometrinė prasmė.

3. Svarbiausios teoremos apie funkcijos išvestinę: diferencijuojamumo ir tolydumo ryšys, sudėtinės funkcijos išvestinė ir kt.

4. Funkcijų išvestinių lentelė.

5. Laipsninių-rodiklinių funkcijų diferencijavimas.

6.1 Funkcijos išvestinės apibrėžimas.

Sakykime, funkcija $y = f(x)$ apibrėžta intervale (a, b). Imkime kurią nors kintamojo reikšmę $x = x_0$, $x_0 \in [a, b]$, o $y_0 = f(x_0)$. Funkcijos argumentui suteikime pokytį $\Delta x \neq 0$ tokį, kad $x_0 + \Delta x \in (a, b)$. Tuomet funkcijos reikšmė taške $x_0 + \Delta x$ yra lygi $f(x_0 + \Delta x)$, t. y. funkcija įgyja pokytį $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, atitinkantį argumento pokytį Δx.

6.1 Apibrėžimas. Jei egzistuoja funkcijos pokyčio Δy ir jį atitinkančio nepriklausomojo kintamojo pokyčio Δx santykio riba, kai $\Delta x \to 0$, t. y.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

tai ji vadinama funkcijos $y = f(x)$ išvestine nepriklausomojo kintamojo x atžvilgiu taške x_0. Išvestinę žymime y', $\quad f'(x_0)$. Išvestinių skaičiavimas vadinamas diferencijavimu.

6.2 Apibrėžimas. Jei egzistuoja funkcijos pokyčio Δy ir jį atitinkančio nepriklausomojo kintamojo pokyčio Δx santykio riba, kai $\Delta x \to +0$, t. y.

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

tai ji vadinama funkcijos $y = f(x)$ dešiniąja išvestine nepriklausomojo kintamojo x atžvilgiu taške x_0. Žymime $f'(x_0 + 0)$.

6.3 Apibrėžimas. Jei egzistuoja funkcijos pokyčio Δy ir jį atitinkančio nepriklausomojo kintamojo pokyčio Δx santykio riba, kai $\Delta x \to -0$, t. y.

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

tai ji vadinama funkcijos $y = f(x)$ kairiąja išvestine nepriklausomojo kintamojo x atžvilgiu taške x_0. Žymime $f'(x_0 - 0)$.

6.1 Teorema. *Funkcija $f(x)$ taške $x = x_0$ turi išvestinę tada ir tik tada, kai jos kairioji ir dešinioji išvestinės tame taške yra lygios, t. y., kai $f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0)$.*

Funkcijos išvestinė yra argumento x funkcija. Jei ji turi išvestinę, tai ši vadinama funkcijos $f(x)$ antrosios eilės (antrąja) išvestine ir žymima $f''(x)$. Remdamiesi išvestinės apibrėžimu, turime

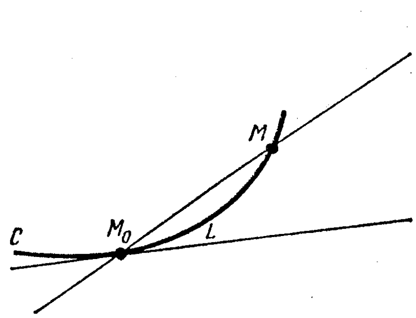
$$f''(x_0) = (f'(x_0))' = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

Analogiškai galime apibrėžti trečiosios, ketvirtosios ir aukštesniųjų eilių išvestines. Tuomet n – osios eilės išvestinė:

$$f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}(x_0)\right)'.$$

6.2 Funkcijos išvestinės geometrinė prasmė.

6.4 Apibrėžimas. Funkcijos grafiko liestinė (L) taške M_0 yra ribinė kirstinės, einančios per taškus M_0 ir M (M – funkcijos grafiko (kreivės) taškas) padėtis, kai M kreive artėja prie M_0 (1 pav.).



1 pav.

Nagrinėkime funkcijos $y = f(x)$ grafiką (1 pav.). Tarkime, kad ši funkcija taške M_0 turi liestinę L. Kai funkcijos grafiko kirstinė, einanti per taškus M ir M_0 artėja prie liestinės L, tai kirstinės su teigiamąja Ox ašies kryptimi sudaromas kampas β artėja prie kampo α, t. y.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \beta = \alpha.$$

Taigi geometriškai funkcijos išvestinė reiškia kampo, kurį funkcijos $y = f(x)$ grafiko liestinė, nubrėžta taške $M_0(x_0, y_0)$, sudaro su teigiamąja Ox ašies kryptimi, tangentą, t. y.

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

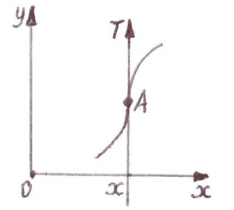
Funkcija tam tikrame taške x_0 gali turėti baigtinę arba begalinę (3 – 4 pav.) išvestinę, arba jos iš viso neturėti (5 – 6 pav.).

- $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty, \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \quad \text{(3 pav.)}.$$

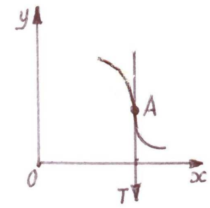
- $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty, \quad \alpha = -\frac{\pi}{2} \quad \text{(4 pav.)}.$$

- $$f'(x-0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty, \quad \alpha = -\frac{\pi}{2},$$
$$f'(x+0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty, \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \quad \text{(5 pav.).}$$

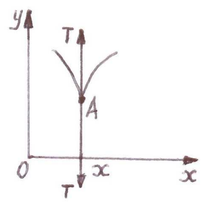
- $$f'(x-0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty, \quad \alpha = \frac{\pi}{2},$$
$$f'(x+0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty, \quad \alpha = -\frac{\pi}{2} \quad \text{(6 pav.).}$$



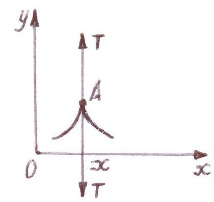
3 pav.



4 pav.



5 pav.



6 pav.

6.3 Svarbiausios teoremos apie funkcijos išvestinę.

6.2 Teorema. *Jei funkcija $y = f(x)$ taške x_0 turi baigtinę išvestinę $y' = f'(x_0)$, tai funkcijos pokytis gali būti išreiškiamas taip:*

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

čia

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0.$$

6.3 Teorema. *Jei funkcija $y = f(x)$ taške x_0 turi baigtinę išvestinę, tai ji tame taške yra tolydi.*

Jei funkcija tolydi, tai nebūtinai ji ir diferencijuojama.

6.4 Teorema. *Jei funkcijos $u = \varphi(x)$, $\quad v = \psi(x)$ yra diferencijuojamos taške x_0, tai ir funkcijos $C \cdot u$, $\quad u \pm v$, $\quad u \cdot v$, $\quad \frac{u}{v}$ yra diferencijuojamos taške x_0, o jų išvestinės atitinkamai lygios:*

$$\begin{aligned}
&(C \cdot u)' = C(u)', \\
&(u \pm v)' = u' \pm v', \\
&(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v', \\
&\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, v(x_0) \neq 0.
\end{aligned}$$

6.5 Teorema. *Tarkime, kad funkcija $u = \varphi(x)$ diferencijuojama taške x_0, o funkcija $y = f(u)$ atitinkamame taške $u_0 = \varphi(x_0)$. Tada sudėtinė funkcija $y = f(\varphi(x))$ diferencijuojama taške x_0, o jos išvestinė yra lygi: $y' = (f(\varphi(x)))' = f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0) = f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0)$.*

6.4 Funkcijų išvestinių lentelė.

1. $(C)' = 0$.

2. $((f(x))^\alpha)' = \alpha(f(x))^{\alpha-1}(f(x))'$,
$\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)' = -\dfrac{1}{(f(x))^2}(f(x))'$,
$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}}(f(x))'$.

3. $(a^{f(x)})' = a^{f(x)} \ln a(f(x))'$,
$(e^{f(x)})' = e^{f(x)}(f(x))'$.

4. $(\log_a f(x))' = \frac{1}{f(x)\ln a}(f(x))'$,
$(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)}(f(x))'$.

5. $(\sin f(x))' = \cos f(x)(f(x))'$.

6. $(\cos f(x))' = -\sin f(x)(f(x))'$.

7. $(tgf(x))' = \frac{1}{\cos^2 f(x)}(f(x))'$.

8. $(ctgf(x))' = -\frac{1}{\sin^2 f(x)}(f(x))'$.

9. $(\arcsin f(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-(f(x))^2}}(f(x))'$.

10. $(\arccos f(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-(f(x))^2}}(f(x))'$.

11. $(arctgf(x))' = \frac{1}{1+(f(x))^2}(f(x))'$.

12. $(arcctgf(x))' = -\frac{1}{1+(f(x))^2}(f(x))'$.

6.5 Laipsninių-rodiklinių funkcijų diferencijavimas.

Tarkime, kad turime funkciją $y = u^v, u > 0$, čia $u = \varphi(x), v = \psi(x)$, o funkcijos $u = \varphi(x)$ ir $v = \psi(x)$ yra diferencijuojamos taške x_0. Išlogaritmvę lygybę $y = u^v$, gauname

$$\ln y = v \ln u.$$

Šią lygybę galime diferencijuoti, nes egzistuoja funkcijos

$$y = e^{v \ln u}$$

išvestinė. Išdiferencijavę turime:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = v' \cdot \ln u + v\frac{1}{u} \cdot u',$$

o iš čia

$$y' = y\left(\frac{vu'}{u} + v' \cdot \ln u\right).$$

Į pastarąją lygybę vietoj y įstatę jo išraišką, gauname, kad

$$y' = u^v\left(\frac{vu'}{u} + v' \cdot \ln u\right).$$