7 Septintoji savaitė. Funkcijos diferencialas ir jo taikymai.

Šioje paskaitoje nagrinėjami klausimai:

1. Diferencialo apibrėžimas.

2. Teoremos apie diferencialus ir jų skaičiavimą.

3. Diferencialų taikymai.

7.1 Diferencialo apibrėžimas.

Tarkime, kad funkcija $y = f(x)$ yra diferencijuojama taške x_0. Tuomet jos pokytį Δy, atitinkantį argumento pokytį Δx galime užrašyti taip:

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

čia

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0.$$

Kai $A \neq 0$, tai pastaroji lygybė rodo, kad nykstamai mažėjantis dėmuo $A \cdot \Delta x$ yra ekvivalentus nykstamai mažėjančiam Δy, t. y. yra jo pagrindinė dalis.

7.1 Apibrėžimas. Diferencijuojamos funkcijos $y = f(x)$ pokyčio Δy pagrindinė dalis $A \cdot \Delta x$ vadinama funkcijos diferencialu. Jį žymime dy.

Žinome, kad funkcija diferencijuojama tada ir tik tada, kai ji turi baigtinę išvestinę. Vadinasi, $A = f'(x)$. Tuomet diferencialas

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Šioje išraiškoje Δx yra bet kuris nepriklausomojo kintamojo pokytis, todėl

$$\Delta y \sim dy.$$

Nepriklausomojo kintamojo diferencialu vadinamas pats pokytis Δx, t. y.

$$dx = \Delta x.$$

Tuomet

$$dy = f'(x)dx.$$

O iš čia

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Tai reiškia, kad diferencialai dy ir dx kinta proporcingai.

7.2 Teoremos apie diferencialus ir jų skaičiavimą.

7.1 Teorema. *Pirmasis funkcijos $y = f(x)$ diferencialas yra invariantinis formos atžvilgiu, t. y*

$$dy = f'(x)dx = f'(t)dt.$$

Jei $y = f(x)$, o $x = \varphi(t)$, tai

$$dy = f'(x)dx$$

arba

$$dy = f'(x)\varphi'(t)dt.$$

7.2 Teorema. *Tarkime, kad funkcijos $u = \varphi(x), v = \psi(x)$ yra diferencijuojamos. Tuomet:*

$$\begin{aligned} &d(Cu) = C \cdot du, \\ &d(u \pm v) = du \pm dv, \\ &d(uv) = vdu + udv, \\ &d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}. \end{aligned}$$

7.3 Diferencialų taikymai.

Diferencialo taikymas apytiksliame skaičiavime.
Kaip jau esame minėję, tuo atveju, kai $\Delta x \to 0$, funkcijos $y = f(x)$ diferencialas $dy \sim \Delta y$. Todėl

$$\Delta y \approx dy$$

arba

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x.$$

Funkcijos reikšmių apytiksliam skaičiavimui taikoma tokia formulė:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Diferencialo taikymas paklaidoms įvertinti.
Tarkime, kad dydį x išmatuojame arba apskaičiuojame betarpiškai, o dydį y nustatome pagal formulę $y = f(x)$. Aišku, kad matavimų duomenys, turi tam tikrą paklaidą Δx. Tuomet ir dydis y turės paklaidą Δy. Paprastai paklaidos yra labai mažos, tai galime laikyti, kad

$$\Delta y = f'(x)\Delta x.$$

Paprastai dydžio x absoliučiosios paklaidos rėžis h_x yra žinomas, t. y.

$$| \Delta x | \leqslant h_x.$$

Tuomet dydžio y absoliučiąja paklaida laikomas dydis

$$h_y = | f'(x) | \cdot h_x.$$