1.2. Nekorektiškų uždavinių sprendimo metodai

Šioje paskaitoje nagrinėsime paprastus, bet veiksmingus nekorektiškų uždavinių sprendimo metodus.

1.2.1. Sprendinio parinkimo metodas

Spręsime nekorektišką uždavinį

$$Av = u, \quad u \in U, \ \ v \in V, \tag{1.3}$$

kur U ir V yra metrinės erdvės. Tarsime, kad $AV = U$ ir egzistuoja atvirkštinis operatorius A^{-1}, bet jis nebūtinai yra tolydus, t.y. neišpildyta sprendinio stabilumo sąlyga.

Daugeliui uždavinių neegzistuoja konstruktyvių algoritmų, leidžiančių efektyviai apskaičiuoti operatorių A^{-1}, t.y. realizuoti uždavinio sprendimo tiesioginį algoritmą

$$v = A^{-1}u.$$

Tada kitais algoritmais ieškome tikslaus sprendinio artinių. Beveik visus tokius algoritmus galime apibūdinti šia *bendra schema*.

1. Apibrėžiame sprendinių aibės poaibį $W \subset V$ ir skaičiuojame jos elementų vaizdus Av, $v \in W$, t.y. sprendžiame tiesioginį uždavinį, kuris yra daug paprastesnis už atvirkštinį uždavinį $A^{-1}u$. Pavyzdžiui, spręskime tiesinių lygčių sistemą, kai A yra $N \times N$ dydžio matrica. Tada ieškodami sprendinio Gauso algoritmu atliekame $\frac{2}{3}N^3$ aritmetinius veiksmus. Toks algoritmas realizuotinas tik tada, kai matricos determinantas nelygus nuliui. O tiesioginiame algoritme skaičiuojame matricos ir vektoriaus sandaugą Av, atliekame tik $2N^2$ veiksmų.

2. Ieškome tokio artinio $v_0 \in W$, kuris minimizuoja sprendinio netiktį

$$\rho_U(Av_0, u) = \inf_{v \in W} \rho_U(Av, u). \tag{1.4}$$

Variacinė uždavinio formuluotė remiasi sąlyga, kad jei imsime tikslų uždavinio sprendinį $v = A^{-1}u$, tai $\rho_U(Av, u) = 0$. Vienas paprastas ir veiksmingas tokio tipo algoritmas yra šis: atsitiktiniu būdu parenkame aibės W elementus $\{v_1, v_2, \ldots, v_N\}$, kiekvienam iš jų apskaičiuojame sprendinio netiktį $\rho_U(Av_j, u)$, $j = 1, \ldots, N$, tada išrenkame tą elementą v_k, kuriam netiktis yra mažiausia.

Dažniausiai naudojame iteracinius algoritmus ir sudarome seką sprendinio artinių $\{v_1, v_2, \dots, v_N\}$, kurie nuosekliai sumažina sprendinio netiktį

$$\rho_U(Av_j, u) \leq \rho_U(Av_k, u), \quad \text{kai} \quad j > k.$$

Pavyzdžiui, taip sprendžiame tiesinių lygčių sistemas jungtinių gradientų metodu arba netiesinių lygčių sistemas Niutono metodu.

Sprendinio parinkimo metode leistinų sprendinių aibę W pasirenkame priklausančią nuo baigtinio (kaip taisyklė, nedidelio) skaičiaus parametrų, kintančių aprėžtoje srityje. Tada W yra uždara, baigtinės dimensijos erdvė. Kai W turi tik baigtinį skaičių elementų $\{v_i,\ i = 1, \dots, N\}$, tai variacinis uždavinys supaprastėja ir gauname minimizacijos uždavinį

$$\rho_U(Av_0, u) = \min_{v_i \in W} \rho_U(Av_i, u).$$

Tarkime, kad turime tikslius pradinius duomenis $u = u_T$ ir reikia rasti (1.3) uždavinio sprendinį v_T:

$$Av_T = u_T.$$

Jeigu tikslus sprendinys $v_T = A^{-1}u_T \in W$ (t.y. lygties dešinioji pusė $u_T \in AW$), tai turime lygybę

$$\rho_U(Av_T, u_T) = \inf_{v \in W} \rho_U(Av, u_T) = 0.$$

Vadinasi v_T yra ir variacinio uždavinio (1.4) sprendinys. Jeigu (1.3) uždavinys turi tik vienintelį sprendinį, tai elementas, minimizuojantis funkcionalą $\rho_U(Av, u_T)$, irgi yra vienintelis. Tačiau vėl negalime garantuoti, kad toks sprendinys tolydžiai priklauso nuo pradinių duomenų.

Kaip minėjome, variacinį uždavinį (1.4) dažniausiai sprendžiame kokiu nors iteraciniu metodu ir randame elementų seką $\{v_j \in W,\ j = 1, \dots, N\}$, kurios vaizdai Av_j konverguoja į u_T:

$$\rho_U(Av_j, u_T) \to 0, \quad \text{kai} \quad j \to \infty.$$

Svarbu rasti nesunkiai patikrinamas apriorines sąlygas, garantuojančias, kad ir elementų seka $v_j \to v_T$, t.y. v_j konverguoja į tikslų uždavinio (1.3) sprendinį.

Priminsime reliatyviai kompaktiškų aibių ir kompakto apibrėžimus.

Apibrėžimas 1. Metrinės erdvės U poaibį $M \subset U$ vadiname *reliatyviai kompaktišku* erdvėje U, jeigu iš bet kurios jo elementų begalinės sekos $\{u_n\} \subset M$ galima išskirti posekį, konverguojantį į kurį nors erdvės U elementą.

Apibrėžimas 2. Metrinės erdvės U poaibį $M \subset U$ vadiname *kompaktu*, jeigu iš bet kurios jo elementų begalinės sekos $\{u_n\} \subset M$ galima išskirti posekį, konverguojantį į kurį nors aibės M elementą.

1.1 teorema. *Tegul metrinė erdvė V atvaizdžiu $A : V \to U$ vaizduojama į kitą metrinę erdvę U. Pasirinkime poaibį $V_0 \subset V$, kuris yra reliatyviai kompaktiškas erdvėje V, ir pažymėkime šios aibės vaizdą $U_0 = AV_0 \subset U$. Jeigu atvaizdavimas $A : V \to U$ yra tolydus ir abipus vienareikšmis, tai atvirkštinis atvaizdavimas $A^{-1} : U_0 \to V_0$ taip pat yra tolydus metrinėje erdvėje V.*

Įrodymas. Tiesioginį atvaizdavimą $V \to U$ apibrėžia funkcija $u = A(v)$, o atvirkštinį atvaizdavimą $U_0 \to V_0$ apibrėžia funkcija $v = A^{-1}(u)$.

Imkime bet kokį elementą $u_0 \in U_0$ ir įrodykime, kad funkcija $A^{-1}(u)$ yra tolydi šio elemento atžvilgiu. Tarkime priešingai, kad ši prielaida yra neteisinga. Tada egzistuoja toks skaičius $\varepsilon_1 > 0$, kad bet kokiam $\delta > 0$ galima parinkti elementą $u_\delta \in U_0$, kad $\rho_U(u_\delta, u_0) < \delta$, bet $\rho_V(v_\delta, v_0) \geq \varepsilon_1$, čia $v_0 = A^{-1}(u_0)$, $v_\delta = A^{-1}(u_\delta)$.

Pasirinkime teigiamųjų skaičių seką $\{\delta_n > 0\}$, konverguojančią į nulį

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0.$$

Kiekvienam δ_n egzistuoja $u_n \in U_0$, toks kad:

$$\rho_U(u_n, u_0) < \delta_n, \quad \text{bet} \quad \rho_V(v_n, v_0) \geq \varepsilon_1,$$

čia pažymėjome $v_n = A^{-1}(u_n) \in V_0$. Aišku, kad elementų seka $\{u_n\}$ konverguoja į u_0:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u_0.$$

Kadangi visi elementai v_n priklauso aibei V_0, kuri yra reliatyviai kompaktiška metrinėje erdvėje V, tai iš begalinės sekos $\{v_n\}$ galime išrinkti posekį $\{v_{n_k}\}$, konverguojantį į elementą $\tilde{v}_0 \in V$:

$$\lim_{k\to\infty} v_{n_k} = \tilde{v}_0.$$

Kiekvienam n_k teisinga nelygybė $\rho_V(v_{n_k}, v_0) \geq \varepsilon_1$, todėl ir $\rho_V(\tilde{v}_0, v_0) \geq \varepsilon_1$. Taigi $\tilde{v}_0 \neq v_0$, t.y. elementas $\tilde{v}_0$ nesutampa su v_0.

Nagrinėkime aibės U_0 elementų posekį $\{u_{n_k} = A(v_{n_k})\}$. Kadangi funkcija $A(v)$ yra tolydi, tai

$$\lim_{k\to\infty} u_{n_k} = \lim_{k\to\infty} A(v_{n_k}) = A\big(\lim_{k\to\infty} v_{n_k}\big) = A(\tilde{v}_0) = \tilde{u}_0.$$

Seka $\{u_{n_k}\}$ yra konverguojančios sekos $\{u_n\}$ posekis, todėl jų ribos turi sutapti:

$$\tilde{u}_0 = u_0.$$

Tada teisingos tokios lygybės:

$$A(\tilde{v}_0) = \tilde{u}_0 = u_0 = A(v_0),$$

t.y. $A(\tilde{v}_0) = A(v_0)$. Atvaizdavimas $A : V \to U$ yra abipus vienareikšmis, todėl $\tilde{v}_0 = v_0$. Gavome prieštaravimą anksčiau įrodytai nelygybei $\tilde{v}_0 \neq v_0$. Teorema įrodyta. $\Box$

Taigi *sprendinio parinkimo* metode minimizuojanti seka $\{v_n\}$ konverguoja į tikslų sprendinį

$$\lim_{n\to\infty} v_n = v_T,$$

jei išpildytos tokios pakankamosios sąlygos:

1. A yra tolydus ir abipus vienareikšmis atvaizdavimas.
2. v_T priklauso aibei W, kuri yra kompaktas.

Dabar nagrinėkime atvejį, kai vietoj (1.3) lygties tikslios dešiniosios pusės u_T turime tik jos artinį u_δ, kuriam teisingas įvertis $\rho_U(u_\delta, u_T) \leq \delta$. Tarkime, kad $u_\delta \in AW$, t.y. u_δ priklauso kompakto W vaizdui. Iš 1.1 teoremos gauname, kad atvaizdavimas

$$A^{-1} : AW \to W$$

yra tolydus, todėl sprendinio v_T artiniu galime imti elementą

$$v_\delta = A^{-1} u_\delta \in W.$$

Kai $\delta \to 0$, toks artinys v_δ konverguoja į tikslų uždavinio (1.3) sprendinį

$$\lim_{\delta\to 0} v_\delta = v_T,$$

taigi išpildytos visos korektiško matematinio uždavinio sąlygos.

Kaip jau pastebėjome anksčiau, daugeliui taikomųjų uždavinių atvirkštinio operatoriaus A^{-1} efektyvūs skaičiavimo algoritmai egzistuoja labai retai. Dažniausiai sprendinio artinį parenkame spręsdami variacinį uždavinį (1.4). Tada užtenka rasti elementą $\tilde{v}_\delta \in W$, tenkinantį nelygybę

$$\rho_U(A\tilde{v}_\delta, u_\delta) \le C\delta, \quad C > 0.$$

Įsitikinsime, kad toks artinys konverguoja į tikslų uždavinio sprendinį v_T, kai parametras $\delta \to 0$. Naudodami trikampio nelygybę įsitikiname, kad teisingas įvertis

$$\rho_U(A\tilde{v}_\delta, u_T) \le \rho_U(A\tilde{v}_\delta, u_\delta) + \rho_U(u_\delta, u_T) \le (C+1)\delta = \delta_1,$$

taip pat iš 1.1 teoremos žinome, kad atvirkštinis atvaizdavimas

$$A^{-1} : AW \to W$$

yra tolydus, tada gauname įvertį

$$\rho_V(\tilde{v}_\delta, v_T) \le \varepsilon(\delta_1)$$

ir atstumas iki tikslaus sprendinio $\varepsilon(\delta_1)$ artėja į nulį, kai $\delta_1 \to 0$, t.y. artinys $\tilde{v}_\delta$ konverguoja į v_T.

1 pastaba. Spręsdami variacinį uždavinį ir pasirinkdami iteracijų baigimo kriterijų, panaudojome informaciją apie uždavinio duomenų tikslumą δ (tokią informaciją gauname iš matavimo įrangos charakteristikų ar skaičiavimo algoritmo sąlygų, jei duomenis generuojame sudėtingame virtualiame ekperimente). Iteracijas baigiame tada, kai gautojo artinio paklaida yra tos pačios eilės dydis, kaip ir uždavinio duomenų u matavimo paklaida. Tokiu būdu minimizuojame sprendinio parinkimo skaičiavimų apimtį, nes tolimesnis iteracijų vykdymas nebeduoda jokio esminio gautojo artinio globaliojo tikslumo pagerinimo (lyginant su tiksliu uždavinio sprendiniu v_T).

1.2 pavyzdys. Integralinės lygties sprendimas. Pirmoje paskaitoje įsitikinome, kad integralinės lygties

$$Av := \int_a^b K(x,s)v(s)\,ds = u(x), \quad c \le x \le d, \quad u(x) \in L_2(c,d)$$

sprendimas yra nekorektiškas uždavinys, jei $V = L_2(a,b)$ arba $C(a,b)$. Dabar ieškosime šio uždavinio sprendinio $v(s)$ monotoniškų ir tolygiai aprėžtų funkcijų aibėje. Kaip pavyzdį imsime monotoniškai didėjančių funkcijų aibę

$$W_1 = \{v: \ \ v(s_1) < v(s_2), \ \ \text{kai } s_1 < s_2, \ \ |v(s)| \le B\}.$$

Jeigu $u \in AW_1$, tai gautasis uždavinys tampa korektišku, nes aibė W_1 yra kompaktas erdvėje $L_2(a,b)$.

Remiantis aukščiau pateikta teorija, jei turime netikslius pradinius duomenis $u_\delta \in AW_1$:

$$\rho_{L_2[c,d]}(u_\delta, u_T) \le \delta,$$

tai tikslaus sprendinio v_T artiniu galime imti integralinės lygties sprendinį:

$$v_\delta = A^{-1} u_\delta,$$

(t.y. vietoj tikslių pradinių duomenų naudojame jų artinį u_δ). Ieškodami sprendinio artinio minimizuojame funkcionalą

$$\rho_{L_2(a,b)}(Av, u_\delta) = \Big\| \int_a^b K(x,s)v(s)\,ds - u_\delta(x) \Big\|.$$

Sprendinio parinkimo metode vietoj integralinės lygties sprendimo aibėje W_1 galime generuoti daug atsitiktinių artinių $v^n \in W_1$ ir skaičiuoti tokios funkcijos integralo reikšmę (t.y. nagrinėjame daug paprastesnį integralo skaičiavimo uždavinį). Užtenka rasti artinį v_δ, kuris tenkina nelygybę

$$\Big\| \int_a^b K(x,s)v_\delta(s)\,ds - u_\delta(x) \Big\| \le C\delta, \ \ C > 0. \tag{1.5}$$

Tačiau yra sukurti ir efektyvesni algoritmai, kuriais tarp monotoniškų, tolygiai aprėžtų funkcijų randame variacinio uždavinio (1.4) sprendinio artinius, tenkinančius (1.5) įvertį.

Dažniausiai integralus skaičiuojame skaitiniais metodais. Funkciją $v(s)$ apibrėžiame tinklo

$$\omega_{sh} = \Big\{ s_n: \ \ s_n = a + nh_s, \ \ n = 0,1,\dots,N, \ \ h_s = \frac{b-a}{N} \Big\}$$

taškuose, o funkciją $u(x)$ apibrėžiame

$$\omega_{xh} = \Big\{ x_n: \ \ x_n = c + nh_x, \ \ n = 0,1,\dots,N, \ \ h_x = \frac{d-c}{N} \Big\}$$

taškuose. Integralą aproksimuojame, pavyzdžiui, naudodami trapecijų fomulę:

$$A_h v_h(x_j) := \sum_{n=0}^{N} c_n K(x_j, s_n) v_h(s_n) = u(x_j), \quad x_j \in \omega_{xh},$$

čia c_n yra sumavimo koeficientai

$$c_0 = \frac{1}{2}h_s, \;\; c_n = h_s, \; n = 1, \dots, N-1, \;\; c_N = \frac{1}{2}h_s.$$

Pažymėkime vektorius

$$U_N = \big(u_0, u_1, \dots, u_N\big)^T, \quad V_N = \big(v_0, v_1, \dots, v_N\big)^T,$$

čia $u_j = u(x_j)$, $v_n = v(s_n)$. Apibrėžkime $(N+1) \times (N+1)$ dydžio matricą

$$\mathbf{A} = \big(a_{jn}\big), \quad a_{jn} = K(x_j, s_n)\, c_n, \quad 0 \le j, n \le N.$$

Taigi vietoj integralinės lygties sprendžiame tiesinę lygčių sistemą

$$\mathbf{A} V_N = U_N.$$

Aptarsime dvi svarbiausias tokio pakeitimo savybes.

1. Integralinę lygtį pakeitėme kitu uždaviniu, taigi įnešėme naują paklaidą. Iš skaičiavimo matematikos kurso žinome, kad trapecijų formulės aproksimavimo paklaidą įvertiname dydžiu $\mathcal{O}(h_s^2)$ (kai integruojama funkcija yra pakankamai glodi). Natūralu siekti, kad šios paklaidos dydis būtų suderintas su eksperimentinės paklaidos dydžiu δ.

2. Sprendinys V_N yra baigtinės dimensijos vektorius, taigi sprendinio parinkimo metode turime mažesnę leistinų sprendinių aibę W_1. Jeigu $U_N \in \mathbf{A}W_1$, tai integralinės lygties sprendinio artinį randame išsprendę tiesinių lygčių sistemą

$$U_N = \mathbf{A}^{-1} V_N.$$

Šią sistemą galime spręsti Gauso algoritmu arba naudodami iteracinius algoritmus.

1.2.2. Apibendrintasis sprendinys

Išsiaiškinome, kad uždavinio

$$Av = u, \quad u \in U, \ \ v \in V$$

sprendinio paieška yra korektiškas uždavinys, kai atvaizdavimas $A: V \to U$ yra tolydus ir abipus vienareikšmis, o sprendinio ieškome kompakte $W \subset V$ ir $u_T \in AW$.

Tačiau klasikinis sprendinys $v = A^{-1}u$ gali ir neegzistuoti, jei $u \notin AW$. Taip dažnai atsitinka netgi ir tada, kai tiksli funkcija $u_T \in AW$, nes pradiniai duomenys u gaunami atliekant sudėtingus fizinius ar skaičiuojamuosius eksperimentus ar matuojami su paklaidomis. Pastebėsime, kad realiuose industriniuose taikymuose labai sunku patikrinti sąlygą, kad $u \in AW$.

Tada apibrėžiame *apibendrintąjį* sprendinį $\tilde{v}$ (jį dar vadinsime *kvazisprendiniu*).

Apibrėžimas. Funkcija $\tilde{v}$, aibėje W minimizuojanti funkcionalą

$$\rho_U(A\tilde{v}, u) = \inf_{v \in W} \rho_U(Av, u), \tag{1.6}$$

yra vadinama apibendrintuoju uždavinio (1.3) sprendiniu aibėje W.

Taigi gauname atvaizdį $\tilde{v} = \tilde{R}(u)$. Apibendrintas sprendinys egzistuoja visiems pradiniams duomenims $u \in U$, jei leistinų sprendinių aibė W yra kompaktas.

Akivaizdu, kad jei $u \in AW$, tai apibendrintasis sprendinys sutampa su klasikiniu sprendiniu

$$\tilde{v} = A^{-1}u \quad \text{ir} \ \ \rho_U(A\tilde{v}, u) = 0,$$

tada atvaizdis $\tilde{R}(u) = A^{-1}u$.

Taip apibrėžtas apibendrintas sprendinys nebūtinai yra vienintelis. Šis sprendinys gali netenkinti ir stabilumo sąlygos, t.y. neturime tolydžios sprendinio priklausomybės nuo pradinių duomenų.

Nagrinėsime atvejį, kai pradiniai duomenys u_δ nepriklauso kompakto W vaizdui, t.y. $u_\delta \notin AW$. Tada negalime sprendiniu imti elemento $v_\delta = A^{-1}u_\delta$ ir ieškosime apibendrintojo sprendinio $\tilde{v}_\delta$, tenkinančio variacinį uždavinį (1.6).

Suformuluosime paprastas pakankamas sąlygas, kai egzistuoja vienintelis apibendrintasis sprendinys, kuris tolydžiai priklauso nuo pradinių duomenų, t.y. gauname korektišką uždavinį.

Apibrėžimas 3. Tegul elementas u ir aibė Q priklauso metrinei erdvei U:

$$u \in U, \quad Q \subset U.$$

Aibės Q elementas $q \in Q$ vadinamas u elemento *projekcija* į aibę Q, jei išpildyta lygybė

$$\rho_U(u, q) = \rho_U(u, Q) := \inf_{r \in Q} \rho_U(u, r).$$

Šį elementą žymėsime $q = Pu$.

1.2 teorema. *Tegul A yra tolydus operatorius. Jeigu lygtis $Av = u$ kompakte W turi vienintelį sprendinį (čia $u \in AW$), o kiekvienam elementui $u \in U$ apibrėžta vienintelė jo projekcija $q = Pu$ į aibę $Q = AW$, tai egzistuoja vienintelis (1.3) uždavinio apibendrintasis sprendinys, kuris tolydžiai priklauso nuo dešiniosios lygties pusės u.*

Įrodymas. Pažymėkime Pu_δ elemento u_δ projekciją aibėje AW. Iš apibendrintojo sprendinio ir projekcijos apibrėžimų gauname lygybę

$$\tilde{v}_\delta = A^{-1} P u_\delta,$$

t.y. apibendrintasis sprendinys randamas tiksliai išsprendus (1.3) uždavinį su pakeista dešiniąja lygties puse. Kadangi elemento u_δ projekcija aibėje AW apibrėžiama vieninteliu būdu, o (1.3) uždavinys aibėje W turi vienintelį sprendinį, tai apibendrintasis (1.3) uždavinio sprendinys, kai $u_\delta \notin AW$, yra vienintelis.

Dabar įrodysime, kad jis tolydžiai priklauso nuo u_δ. A yra tolydi funkcija, tai iš 1.1 teoremos gauname, kad kompakto AW atvirkštinis atvaizdavimas į kompaktą W:

$$A^{-1}: \quad AW \to W$$

yra tolydus. Iš funkcinės analizės kurso žinome, kad projektavimo operatorius P yra tolydus metrinėje erdvėje U. Todėl $A^{-1}P$ yra tolydus erdvėje U operatorius, taigi apibendrintasis sprendinys $\tilde{v}_\delta$ tolydžiai priklauso nuo u_δ. $\square$

Apibrėžę apibendrintąjį sprendinį, kurio ieškome kompaktiškoje aibėje W, gauname korektišką uždavinį.

Nurodysime paprastas ir nesunkiai patikrinamas sąlygas, kada galioja 1.2 teoremos reikalavimai.

1.3 teorema. *Tarkime, kad išpildytos tokios sąlygos*

1. *Operatorius A yra tiesinis;*
2. *Homogeninė lygtis*
$$Av = 0$$
turi tik trivialų sprendinį $v = 0$;
3. *Kompaktiška aibė W yra iškila;*
4. *Bet kuri sfera $S_R(u_0) \subset U$, $u_0 \in U$:*
$$S_R(u_0) = \big\{ u \in U : \ \ \rho_U(u, u_0) = R \big\}$$
yra griežtai iškila, t.y.:
$$\rho_U(c_1 u_1 + c_2 u_2, u_0) < R, \ \text{jei} \ \ c_1 + c_2 = 1, \ \ c_1, c_2 > 0.$$

Tada uždavinio (1.3) apibendrintas sprendinys $\tilde{v} \in W$, apibrėžtas kompakte W, yra vienintelis ir tolydžiai priklauso nuo pradinių sąlygų u.

Įrodymas. Kaip seka iš apibendrintojo sprendinio apibrėžimo
$$A\tilde{v} = \tilde{u}, \quad \tilde{u} \in AW.$$
Akivaizdu, kad $\tilde{u}$ yra elemento u projekcija į aibę AW. Įsitikinsime, kad tokia projekcija yra vienintelė.

Pirmiausia parodysime, kad jei aibė W yra iškila, o operatorius A yra tiesinis, tai šio kompakto vaizdas, t.y. aibė AW, irgi yra iškila. Norėdami tai įrodyti imkime bet kuriuos du elementus $u_1, u_2 \in AW$. Reikia patikrinti, kad tada bet kuri tiesinė šių elementų kombinacija $c_1u_1 + c_2u_2$, kai konstantos c_1, c_2 yra neneigiamos $c_1, c_2 \geq 0$ bei normuotos
$$c_1 + c_2 = 1,$$
irgi priklauso aibei AW. Iš elementų u_1, u_2 apibrėžimo seka, kad egzistuoja tokie $v_1, v_2 \in W$, kad
$$Av_1 = u_1, \quad Av_2 = u_2.$$
Tada imkime elementą $v = c_1v_1 + c_2v_2$, jis priklauso kompaktui W, nes aibė W yra iškila. Šį elementą tiesinis operatorius A atvaizduoja į aibės AW elementą
$$A(c_1v_1 + c_2v_2) = c_1Av_1 + c_2Av_2 = c_1u_1 + c_2u_2,$$
taigi įrodėme, kad $c_1u_1 + c_2u_2 \in AW$.

Dabar tarkime priešingai, kad elemento $u \in U$ projekcija aibėje AW yra nevienintelė ir turime dvi projekcijas $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \in AW$. Tada teisinga lygybė

$$\rho_U(\tilde{u}_1, u) = \rho_U(\tilde{u}_2, u) = R.$$

Per taškus $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$ galime sukonstruoti sferą $S_R(u)$. Imkime naują elementą $\tilde{u}_3 = (\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2)/2$. Kadangi $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \in AW$, o aibė AW yra iškila, tai $\tilde{u}_3 \in AW$. Iš teoremos 4 sąlygos gauname, kad sfera $S_R(u)$ yra griežtai iškila, todėl

$$\rho_U(\tilde{u}_3, u) < R.$$

Radome elementą $\tilde{u}_3 \in AW$, kuris yra arčiau elemento u, nei jo projekcijos $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$. Šis prieštaravimas įrodo, kad elemento $u \in U$ projekcija aibėje AW yra vienintelė.

Įsitikinsime, kad apibendrintas sprendinys $\tilde{v} \in W$ yra vienintelis. Tarkime, kad egzistuoja dar viena funkcija $\tilde{v}^* \in W$, tokia kad $A\tilde{v}^* = \tilde{u}$. Tada atėmę abi lygybes ir pasinaudoję tuo, kad A yra tiesinis operatorius, gauname lygtį

$$A\tilde{v} - A\tilde{v}^* = A(\tilde{v} - \tilde{v}^*) = 0.$$

Iš 2 sąlygos seka, kad tada

$$\tilde{v} - \tilde{v}^* = 0, \quad \text{t.y.} \quad \tilde{v} = \tilde{v}^*.$$

Gautasis prieštaravimas ir įrodo, kad negali egzistuoti keli apibendrintieji sprendiniai. Dabar jau teoremos įrodymas užbaigiamas taip pat, kaip ir įrodant 1.2 teoremą. □

1.3 pavyzdys. Apibendrintojo sprendinio radimas Furjė metodu. Tegul U ir V yra Hilberto erdvės, t.y. jose apibrėžta bet kurių dviejų elementų skaliarinė sandauga. Pavyzdžiui, erdvėje V imkime du elementus $v_1, v_2 \in V$, tada jų skaliarinę sandaugą ir atitinkamą normą žymėsime taip:

$$(v_1, v_2), \quad \|v_1\| = (v_1, v_1)^{0.5}.$$

Erdvėje V kompaktu W imsime rutulį, kurio spindulys lygus R:

$$W = B_R := \{v \in V : \ \|v\| \leq R\}.$$

Spręsime uždavinį

$$Av = u, \quad u \in U, \ v \in V. \tag{1.7}$$

Tarsime, kad A yra tiesinis visiškai tolydus operatorius (t.y. atvaizduoja aprėžtą aibę į reliatyviai kompaktišką), tačiau atvirkštinis operatorius A^{-1} nėra tolydus visoje erdvėje U, o elementas u gali ir nepriklausyti rutulio B_R vaizdui AB_R.

Apibrėžiame jungtinį operatorių A^*:

$$(Av, u) = (v, A^*u), \quad \forall u \in U, \ v \in V.$$

Tada A^*A yra savijungis, teigiamai apibrėžtas, visiškai tolydus operatorius:

$$A^*A : \ V \to V.$$

Pažymėkime jo tikrines reikšmes

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \lambda_n \geq \ldots > 0.$$

Remiantis Hilberto-Šmidto teorema gauname, kad jas atitinkačios tikrinės funkcijos (vektoriai)

$$A^*A\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$$

sudaro ortonormuotų funkcijų pilnąją sistemą $\{\varphi_n\}$. Taigi turime erdvės V bazę. Tada elementą $A^*u \in V$ galime išreikšti eilute

$$A^*u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n.$$

Apibendrintasis sprendinys aibėje B_R minimizuoja kvadratinį funkcionalą

$$\rho_U^2(Av, u) = (Av - u, Av - u),$$

čia (u, w) yra dviejų aibės U elementų $u, w \in U$ skaliarinė sandauga.

Pradžioje nagrinėsime nesąlyginio minimumo paieškos uždavinį. Tokio uždavinio sprendinys tenkina Eulerio lygtį, kurią randame variacinio skaičiavimo metodu. Imkime bet kokią funkciją $w \in V$, skaičių ε ir sudarykime kvadratinį funkcionalą

$$J(v + \varepsilon w) := \big(A(v + \varepsilon w) - u, A(v + \varepsilon w) - u\big).$$

Minimumo taške šio funkcionalo pirmoji variacija turi būti lygi nuliui, kai $\varepsilon = 0$:

$$\frac{\partial J(v + \varepsilon w)}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Atlikę nesudėtingus skaičiavimus ir pasinaudoję jungtinio operatoriaus apibrėžimu, gauname lygtį

$$\frac{\partial J(v+\varepsilon w)}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = 2(Av-u, Aw) = 2(A^*Av - A^*u, w) = 0.$$

Kadangi ši lygybė galioja bet kokiems $w \in V$, tai minimumo taške teisinga lygtis

$$A^*Av = A^*u.$$

Įstatę į ją A^*u skleidinį, randame formalią eilutę, apibrėžiančią (1.7) uždavinio sprendinį visoje erdvėje V:

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n}\varphi_n. \tag{1.8}$$

Tada tikriname, ar gautasis sprendinys priklauso rutuliui B_R. Jei taip, tai radome apibendrintąjį (1.7) uždavinio sprendinį. Pasinaudoję tikrinių funkcijų ortonormuotumo savybe, gauname, kad $v \in B_R$, jei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^2}{\lambda_n^2} \le R^2.$$

Jeigu sprendinys (1.8) nepriklauso rutuliui B_R, t.y. $\|v\| > R$, tai turime spręsti sąlyginės minimizacijos uždavinį

$$\rho_U^2(A\tilde{v}, u) = \inf_{v \in S_R}(Av-u, Av-u),$$

$$S_R = \{v: \ (v,v) = R^2\}.$$

Pasinaudojome gerai žinomu faktu, kad elemento $u \in U$ projekcija į iškilą aibę $AB_R \subset U$ yra ant tos aibės kontūro, t.y. sferoje S_R. Lagranžo daugiklių metodu sąlyginės minimizacijos uždavinį suvedame į funkcionalo

$$(Av-u, Av-u) + \alpha(v,v)$$

nesąlyginio minimumo radimo uždavinį. Tada gauname Eulerio lygtį:

$$A^*Av + \alpha I v = A^*u,$$

čia I pažymėjome vienetinį operatorių $Iv = v$. Jos sprendinį išreiškiame eilute

$$\tilde{v} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n + \alpha}\,\varphi_n.$$

Lagranžo daugiklį α randame iš netiesinės lygties

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^2}{(\lambda_n + \alpha)^2} = R^2.$$

Dabar galime paaiškinti, kodėl apibendrintasis sprendinys $\tilde{v}$ yra stabilesnis už klasikinį sprendinį (1.8). Dideliems n, tikrinės reikšmės $\lambda_n \ll 1$ yra mažos, taigi klasikinio sprendinio Furjė eilutėje koeficientus daliname iš mažų skaičių, taip smarkiai padidiname netiksliai žinomų koeficientų c_n paklaidų poveikį galutiniam rezultatui. Apibendrintojo sprendinio skleidinyje prie kiekvieno nario vardiklio pridedame teigiamą konstantą α, todėl skaičiuodami koeficientus išvengiame dalybos iš mažo vardiklio. Tokia pataisa nesmarkiai pakeičia pirmųjų Furjė skleidinio narių reikšmes, bet esminiai sumažina didelio numerio tikrinių funkcijų (taip vadinamų aukštų harmonikų) poveikį.

Kitose paskaitose parodysime, kaip variaciniu algoritmu veiksmingai sprendžiame daug nekorektiškų uždavinių.