Vilniaus Gedimino technikos universitetas

Aleksandras KRYLOVAS

Eugenijus PALIOKAS

ALGEBRA IR GEOMETRIJA PASITELKIANT MAPLE
TEORIJOS SANTRAUKA IR LABORATORINIAI DARBAI
PIRMOJI DALIS

Mokomoji knyga

Vilnius "Technika" 2006

UDK 5******
****

Aleksandras Krylovas, Eugenijus Paliokas. Algebra ir geometrija pasitelkiant Maple. Teorijos santrauka ir laboratoriniai darbai. Pirmoji dalis. Mokomoji knyga. Vilnius: Technika, 2006. *** p.

***** knygoje pateikiami pagrindiniai *********************************

Leidinys skirtas *********** Fundamentinių mokslų ********************** fakultetų bakalaurų studijoms.

Leidinį rekomendavo VGTU Fundamentinių mokslų fakulteto studijų komitetas.

Recenzavo dr. doc. A. Domarkas ir dr. doc. M. Meilūnas

VGTU leidyklos "Technika" ***** mokomosios metodinės literatūros knyga

ISBN 9986-**-****-*
2006

Turinys

Pratarmė

Mokymoji knyga skirta VGTU techomatematikos specalybės studentams, sudijuojantiems dalyką Algebra ir geometrija 1. Šio dalyko programoje numatyti studentų laboratoriniai darbai, naudojant kompiuterinę programą Maple.

Autoriai

Skyrius 1

Teorijos santrauka

1.1 Algebrinės operacijos ir struktūros

1.1.1 Aibės su algebrinėmis operacijomis

Pagrindiniai žymėjimai:
A – aibė, $a \in A$ – aibės elementas,
$B \subset A$ – aibės poaibis,
$\varnothing \subset A$ – tuščioji aibė,
$\forall$ – bendrumo kvantorius (visi, kiekvienas, bet kuris),
$\exists$ – egzistavimo kvantorius (egzistuoja, galima rasti).
$N \subset Z \subset Q \subset R$ – skaičių aibės,
$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $A = \{\alpha, \beta\}$ – baigtinės aibės.

$x \in A$, $y \in A$, $z = x * y \in A$ – binarioji operacija
$\forall x, y \in A \Rightarrow x * y \in A$ – aibė yra uždara operacijos $(*)$ atžvilgiu;
$(A, *)$ – algebrinė struktūra
$(N, +)$, $(Z, -)$, $(Z, \cdot)$

Pavyzdžiai

1. $A = \{\alpha, \beta\}$, $\alpha \oplus \alpha = \alpha$, $\alpha \oplus \beta = \beta$, $\beta \oplus \alpha = \beta$, $\beta \oplus \beta = \alpha$, $(A, \oplus)$.
2. $m, n \in Z$, $m \circ n = m - n + m \cdot n$, $(Z, \circ)$
$1 \circ 2 = 1 - 2 + 1 \cdot 2 = 1$, $2 \circ 3 = 2 - 3 + 2 \cdot 3 = 5$, $3 \circ 4 = 3 - 4 + 3 \cdot 4 = 11$.
3. Kompleksiniai skaičiai
$C = \{(x, y) : x \in R, y \in R\}$, $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$,
$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$
$(1, 2) \cdot (2, 3) = (1 \cdot 2 - 2 \cdot 3, 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2) = (2 - 6, 3 + 4) = (-4, 7)$.
4. n-mačių vektorių erdvė R^n
$R^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_j \in R\}$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$,
$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$.
5. Antrosios eilės kvadratinės matricos
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, $A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$,
$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -2 \\ 43 & -4 \end{pmatrix}$.
6. Vieno kintamojo daugianariai
$P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$,
$a_j \in R$, $a_n \neq 0$ – n-tojo laipsnio polinomas
$A_n(x) + B_n(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$,
$A_n(x) \cdot B_m(x) = C_{n+m}(x) =$
$a_nb_mx^{n+m} + (a_nb_{m-1} + a_{n-1}b_m)x^{n+m-1} + \cdots + (a_1b_0 + a_0b_1)x + a_0b_0$.

1.1.2 Pusgrupiai ir monoidai

Apibrėžimai

Turime algebrinę struktūrą $(A, *)$. Operacija $(*)$ vadinama *komutatyviąja*, kai $\forall x, y \in A$:

$$\boxed{x * y = y * x}$$

Operacija $(*)$ vadinama *asociatyviąja*, kai $\forall x, y, z \in A$

$$\boxed{x * (y * z) = (x * y) * z}$$

Pastebėkime, kad esant operacijos $(*)$ asociatyvumui, galima apibrėžti kėlimo laipsniu n operaciją $x^n = \underbrace{x * x * \cdots * x}_{n \text{ kartų}}$.
Algebrinė struktūra $(A, *)$ su asociatyviąja operacija $(*)$ vadinama *pusgrupiu*.
Pusgrupio elementas $e \in A$ vadinamas *neutraliuoju*, kai $\forall x \in A$

$$\boxed{e * x = x * e = x}$$

Teorema. Neutralusis elementas yra vienintelis.
Įrodymas. Tarkime, kad turime kitą neutralųjį elementą e'. Taikydami apibrėžimą, gauname $e * e' = e' * e = e$. Kita vertus, $e * e' = e' * e = e'$.
Jei operacija $(*)$ vadinama *sudėtimi* ir žymima $(+)$, neutralusis elementas vadinamas *nuliniu*. Toks pusgrupis vadinamas *adiciniu*. Kai turime *daugybos* operaciją $(\cdot)$ (*multiplikacinis* pusgrupis) – neutralųjį elementą vadiname *vienetiniu*.
Pusgrupis su neutraliuoju elementu vadinamas *monoidu*. Jei operacija $(*)$ yra komutatyvi, monoidas vadinamas *komutatyviuoju*.

Pavyzdžiai

1. $(\{0, 1\}, \oplus)$, $\oplus$ – sudėtis moduliu du; operacija $\oplus$ komutatyvi ir asociatyvi; nulinis elementas 0:

$(0 \oplus 0) \oplus 0 = 0 \oplus (0 \oplus 0) = 0$, $(0 \oplus 0) \oplus 1 = 0 \oplus (0 \oplus 1) = 1$,
$(0 \oplus 1) \oplus 0 = 0 \oplus (1 \oplus 0) = 1$, $(0 \oplus 1) \oplus 1 = 0 \oplus (1 \oplus 1) = 0$,
$(1 \oplus 0) \oplus 0 = 1 \oplus (0 \oplus 0) = 1$, $(1 \oplus 0) \oplus 1 = 1 \oplus (0 \oplus 1) = 0$,
$(1 \oplus 1) \oplus 0 = 1 \oplus (1 \oplus 0) = 0$, $(1 \oplus 1) \oplus 1 = 1 \oplus (1 \oplus 1) = 1$.
2. $(Z, \circ)$, operacija $\circ$ nėra komutatyvi:
$3 \circ 4 = 3 - 4 + 3 \cdot 4 = 11$, $4 - 3 + 4 \cdot 3 = 13$,
ir nėra asociatyvi:
$2 \circ (3 \circ 4) = 2 \circ (3 - 4 + 3 \cdot 4) = 2 \circ (11) = 2 - 11 + 22 = 13$,
$(2 \circ 3) \circ 4 = (2 - 3 + 2 \cdot 3) \circ 4 = (5) \circ 4 = 5 - 4 + 5 \cdot 4 = 21$.
Visos operacijos (**3.** – **6.** pavyzdžiai) yra asociatyvios, marticų daugyba nėra komutatyvi:
$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

1.1.3 Grupės

Tarkime, kad $(A, *)$ yra monoidas (t.y. struktūra turi neutralųjį elementą $e \in A$). Elementas $\tilde{a} \in A$ vadinamas *simetriniu* elementui $a \in A$, jei

$$\boxed{\tilde{a} * a = a * \tilde{a} = e}$$

Teorema. Simetrinis elementas vienintelis.
Įrodymas. Tarkime, kas yra kitas simetrinis elementas $\tilde{a}'$. Tada $\tilde{a}' * a = e = a * \tilde{a}'$. Remdamiesi monoido asociatyvumu, gauname, kad $\tilde{a}' = e * \tilde{a}' = (\tilde{a} * a) * \tilde{a}' = \tilde{a} * (a * \tilde{a}') = \tilde{a} * e = \tilde{a}$. Taigi $\tilde{a}' = \tilde{a}$. Galima žymėti $\tilde{a} = a^{-1}$. Pastebėkime, kad $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$. Simetrinis elementas sudėties operacijos atveju paprastai vadinamas *priešingu*, o daugybos operacijos – *atvirkštiniu*.
Pastebėkime, kad

$$\boxed{(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}}$$

Įrodymas išplaukia iš operacijos asociatyvumo: $(x * y) * (y^{-1} * x^{-1}) = (x * (y * y^{-1})) * x^{-1} = (x * e) * x^{-1} = x * x^{-1} = e$. Panašiai gauname $(y^{-1} * x^{-1}) * (x * y) = e$.

Tarkime, kad $\tilde{A} \subset A$. Jei visi elementai $x \in \tilde{A}$ turi simetrinius $x^{-1} \in \tilde{A}$, tai $(\tilde{A}, *)$ – monoidas.

Pavyzdžiai

$(N, +)$, nulinio (neutraliojo) elemento nėra: $0 \notin N$; nė vienas elementas neturi priešingo.

$(Z, +)$, priešingas elementas $z^{-1} = -z$: $z + (-z) = (-z) + z = 0$.

$(Z, \cdot)$, vienetinis (neutralusis) elementas – skaičius $1 \in Z$; atvirkštinis elementas $z^{-1} = \frac{1}{z}$, $z \neq 0$: $z \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot z = 1$.

$(C, +)$ kompleksiniai skaičiai $z = (x, y)$ turi priešingus: $-z = (-x, -y)$.

$(C, \cdot)$ kompleksiniai skaičiai $z = (x, y)$, $(z \neq (0, 0)$ turi atvirkštinius $z^{-1} = (\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2})$: $z * z^{-1} = z^{-1} * z = e = (1, 0)$.

$(M_{2\times2}, \cdot)$, antrosios eilės kvadratinė matrica $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ turi atvirkštinę matrica $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} & -\frac{a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ -\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} & \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{pmatrix}$, jei $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

Turime $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Apibrėžimas. Monoidas $(A, *)$, kurio visi elementai $x \in A$ turi simetrinius $x^{-1} \in A$, vadinamas *grupe*.

Grupę $(A, *)$ galima apibrėžti ir šiomis jos savybėmis:

(1) operacija $(*)$ asociatyvi: $x * (y * z) = x * (y * z)$;

(2) egzistuoja neutralusis elementas: $\exists e \in A \; e * x = x * e = x$;

(3) kiekvienas elementas turi simetrinį: $\forall x \in A \exists x^{-1} : x^{-1} * x = x * x^{-1} = e$.

Komutatyvioji grupė dar vadinama Abelio grupe.

Pavyzdžiai

$(Z, +)$, $(C, +)$ – Abelio grupės;

$(Z, \cdot)$, $(C, \cdot)$ – pusgrupiai.

1.1.4 Baigtinės grupės

Tarkime, kad algebrinė struktūra $(A, *)$ yra grupė ir aibė A yra baigtinė: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Skaičius n vadinamas *grupės eile.*

Ciklinės grupės

Tarkime, kad operacija $(A, *)$ yra grupė. Tada $(*)$ yra asociatyvi ir galima apibrėžti elemento a laipsnį: $a^2 = a * a$, $a^3 = a * a^2 = a^2 * a$, $a^n = a^{n-1} * a = a * a^{n-1}$. Susitarkime, kad $a^1 = a$, $a^0 = e$. Apibrėžkime dar ir neigiamus laipsnius: a^{-1} – simetrinis elementas, $a^{-2} = a^{-1} * a^{-1}$, $a^{-n} = \left(a^{-1}\right)^n$. Taigi algebrinė struktūra $(a) = (\{a^n, n \in Z\}, *)$ yra grupės $(A, *)$ pogrupis. Ją vadiname *cikline* grupe, generuota elemento a.
Ciklinė grupė gali būti baigtinė arba begalinė. Jei grupė yra baigtinė, bet kurio elemento visi laipsniai negali būti skirtingi (priešingu atveju būtų be galo daug elementų). Todėl galima nurodyti tokį mažiausią natūralųjį skaičių d, kad $a^d = e$. Jis vadinamas baigtinės grupės *elemento a eile.*
Baigtinės ciklinės grupės $(a) = (\{a^n, n \in Z\}, *)$ eilė sutampa su jos generuojančio elemento eile.

Perstatos

Turime baigtinę aibę $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Aibės A elementų abipus vienareikšmį atvaizdą į tos pačios aibės elementus (biekciją) vadiname šios aibės elementų *perstata*:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_{n-1} & i_n \end{pmatrix}.$$

Tą pačią perstatą galima perrašyti keliais būdais (jų yra $n!$):

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Perstatų sandauga nėra komutatyvi:

$$f \cdot g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$g \cdot f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Perstatų sandauga yra asociatyvi:

$$(f \cdot g) \cdot h = f \cdot *g \cdot h).$$

Algebrinės struktūros vienetinis elementas yra perstata

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}.$$

Kiekviena perstata p turi atvirkštinę

$$p^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_{n-1} & i_n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}:$$

$$p \cdot p^{-1} = p^{-1} \cdot p = e.$$

Taigi pestatų aibė su daugybos operacija yra grupė.

1.1.5 Žiedas ir laukas

Algebrinė struktūra $(A, +, \cdot)$ yra vadinama *žiedu*, kai $A \neq \emptyset$ ir
1) $(A, +)$ yra komutatyvioji grupė;
2) $(A, \cdot)$ yra pusgrupis;
Kadangi algebrinė struktūra $(A, \cdot)$ yra tik pusgrupis, daugybos operacija $(\cdot)$ gali neturėti atvirkštinės operacijos – dalybos. Tarkime, kad $x \cdot y = 0$ ir $x \neq 0$, $y \neq 0$. Tada struktūros $(A, +, \cdot)$ elementai x,

y vadinami *nulio dalikliais*. Jei $\forall x \neq 0\ \exists x^{-1}\ (x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e)$, tai žiedas neturi nulio daliklių.
Algebrinė struktūra $(A, +, \cdot)$ vadinama *kūnu*, kai $A \neq \emptyset$ ir
1) $(A, +)$ yra komutatyvioji grupė;
2) $(A \setminus \{0\}, \cdot)$ yra grupė;
3) daugybos operacija yra *distributyvi* sudėties atžvilgiu:
$\forall x, y, z \in A$
$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z,$
$(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x.$

Komutatyvusis kūnas vadinamas *lauku*.

Pavyzdžiai
1. $(R, +, \cdot)$ – kūnas.
2. Kvadratinės matricos tokio pavidalo $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ sudaro kūną.

1.2 Kompleksiniai skaičiai

1.2.1 Apibrėžimai

Kompleksiniais skaičiais vadiname algebrinę struktūrą su sudėties ir daugybos operacijomis:
$(C, +, \cdot)$, $C = R \times R = \{(x, y),\ x, y \in R\}$,
$z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$, $z_1 + z_2 = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$,
$z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot x_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$.
Nulinis elementas:
$0 = (0, 0)$: $z + 0 = (x + 0, y + 0) = (0 + x, 0 + y) = z$, $\forall z$.
Vienetinis elementas:
$1 = (1, 0)$: $z \cdot 1 = (x \cdot 1 - y \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 1) = (1 \cdot x - 0 \cdot y, 0 \cdot x + 1 \cdot y) = 1 \cdot z = z$, $\forall z$.

1.2.2 Operacijų savybės

Komutatyvumas:
$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;
$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.
Asociatyvumas:
$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$;
$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$.
Distributyvumas:
$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

Atimties ir dalybos operacijos

Priešingas elementas $(-z) = (-x, -y)$.
Atimties operacija

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (x_1 + (-x_2), y_1 + (-y_2)) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2).$$

Kompleksinių skaičių z_1 ir $z_2 \neq 0$ *dalmuo* $\frac{z_1}{z_2}$ yra toks kompleksinis skaičius $w = (x, y)$, kad $w \cdot z_2 = z_1$. Taigi reikia išspręsti lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x_2 x - y_2 y &= x_1, \\ y_2 x + x_2 y &= y_2. \end{cases}$$

Gauname $w = \frac{z_1}{z_2} = (\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2})$.
Atvirkštinis elementui $z = (x, y)$ elementas $z^{-1} : z^{-1} z = (1, 0)$ yra toks:

$$z_2^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

Išnagrinėkime, kompleksinių skaičių aibės poaibį $C^0 = \{(x, 0),\ x \in R\}$. Pastebėkime, kad $\forall z_1, z_2 \in C^0$ $z_1 + z_2 \in C^0$, $z_1 \cdot z_2 C^0$. Algebrinė struktūra $(C^0, +, \cdot)$ sutampa su $(R, +, \cdot)$, jei susitarti, kad $x = (x, 0)$ $\forall x \in R$.
Taigi, turime

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C.$$

Kompleksinių skaičių algebrinis pavidalas

Išspręskime lygtį $z^2 = -1$ kompleksinių skaičių aibėje. Turime lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = -1, \\ 2xy & = 0. \end{cases}$$

Kadangi $x, y \in R$ turi būti $x = 0$ arba $y = 0$. Pirmąją lygtį galima išspręsti tik kai $x = 0$. Šiuo atveju $y = 1$ arba $y = -1$. Gauname du lygties sprendinius $(0, 1)$ ir $(0, -1)$.
Pažymėkime kompleksinį skaičių $(0, 1) = i$ ir vadinsime jį *menamuoju vienetu*. Užrašykime kompleksinių skaičių *pagrindinę tapatybę*

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Pastebėję, kad $z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0)$, kompleksinį skaičių z galime užrašyti *algebriniu* pavidalu

$$\boxed{z = x + iy}$$

Žymėsime $x = \mathrm{Re}z$ ir vadinsime kompleksinio skaičiaus *realiąja* dalimi; $\mathrm{Im}z = y$ – *menamąja* dalimi.

Operacijų algebrinis pavidalas

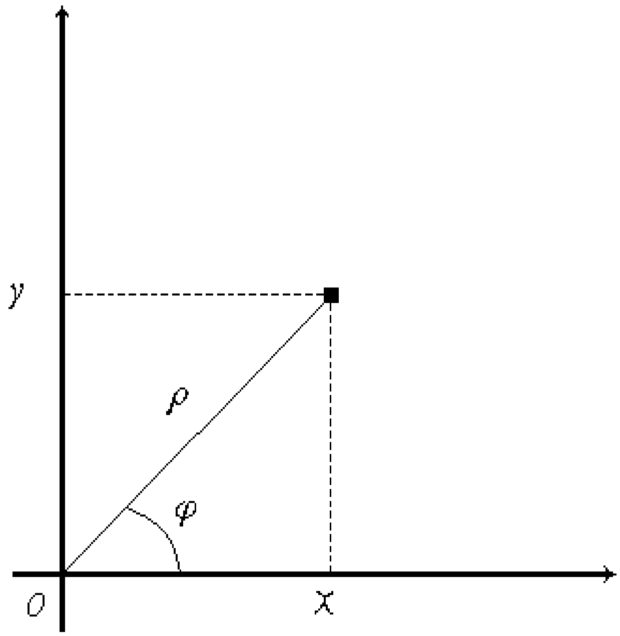
$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2),$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + a_2 y_1),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

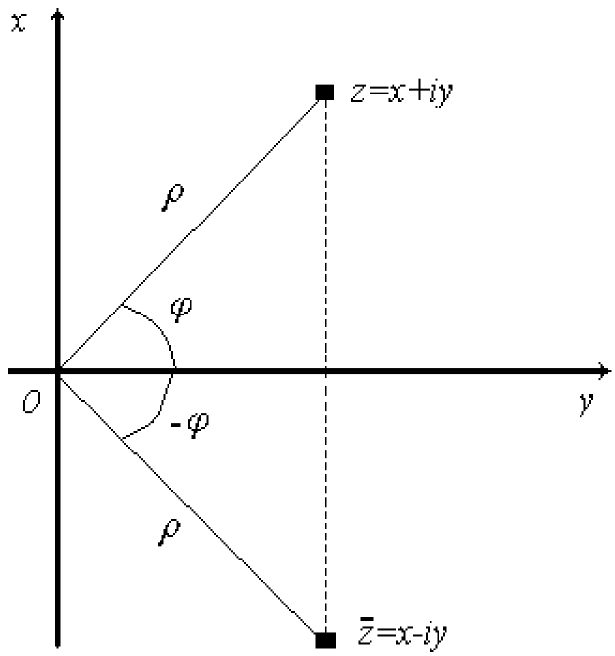
Skaičius $\overline{z} = x - iy$ vadinamas *kompleksiniu jungtiniu* skaičiui $z = x + iy$.

1.2.3 Geometrinis vaizdavimas



1 pav. Kompleksinio skaičiaus geometrinis vaizdavimas

Pažymėkime, $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – kompleksinio skaičiaus *modulį*, φ - kompleksinio skaičiaus $z = (x, y) = x + iy$ *argumentą* ($\tan \varphi = \frac{y}{x}$ arba $\cos \varphi = \frac{x}{|z|}$; $\sin \varphi = \frac{y}{|z|}$ žr. 1 pav.).



2 pav. Jungtinio skaičiaus geometrinis vaizdavimas

Paminėkime, kai kurias kompleksinio jungtinio skaičiaus $\overline{z} = x - iy$ (žr. 2 pav.) savybes:

$\arg \overline{z} = -\arg z$, $|\overline{z}| = |z|$, $\overline{\overline{z}} = z$;

1.2.4 Trigonometrinis ir eksponentinis pavidalas

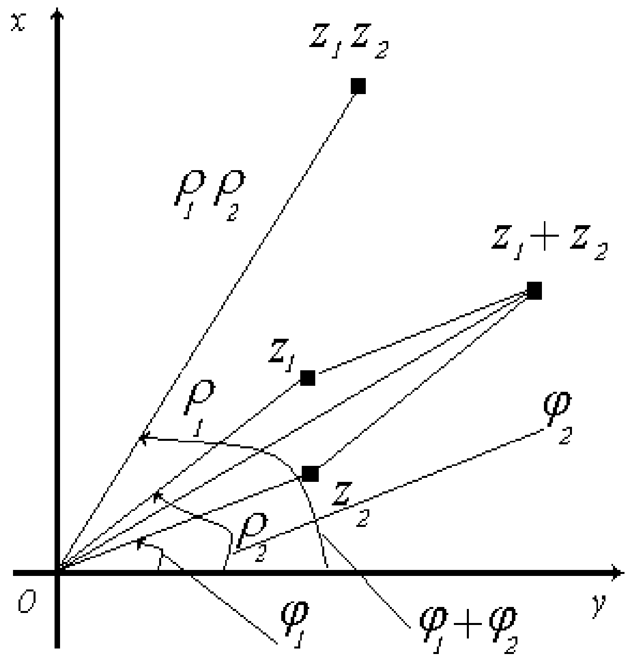
Kompleksinį skaičių $z = (x, y) = x + iy$ galima užrašyti ir *trigonometriniu* pavidalu

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Kompleksinio skaičiaus *argumentas* φ apibrėžtas tik su tikslumu $2\pi k$, $k \in Z$. Todėl susitarkime žymėti $\arg z = \varphi$ jo reikšmę, priklausančią intervalui $-\pi < \varphi \leqslant \pi$ ir vadinsime argumento *pagrindine reikšme.* Visų galimų argumento reikšmių **aibę** žymėsime

Arg z:

$$\text{Arg } z = \{\arg z + 2\pi k, \;\; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$$



3 pav. Sudėties ir daugybos geometrinė prasmė

Raskime kompleksinių skaičių sandaugos trigonometrinį pavidalą (žr. 3 pav.):

$$z_1 \cdot z_2 = (\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)) \cdot (\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)) =$$
$$\rho_1\rho_2\left((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i\left(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2\right)\right) =$$
$$\rho_1\rho_2\left(\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right)$$

Susitarkime žymėti[1] $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$. Tada kompleksinį skaičių užrašome dar ir *eksponentiniu* pavidalu:

$$z = (x, y) = x + iy = |z|(\cos\arg z + i\sin\arg z) = |z|e^{i\arg z}.$$

[1] Ši formulė įrodoma matemetinės analizės kurse.

Taigi $z_1 z_2 = \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$. Pastebėję, kad kompleksinį jungtinį skaičių $\overline{z} = x - iy$ užrašome taip $\overline{z} = \rho(\cos\varphi + i\sin(-\varphi)) = \rho e^{-i\varphi}$, gauname dalybos formulę

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2^2} \cdot \rho_2 \left(\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right) = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

1.2.5 Laipsnis

Taikydami daugybos formulę n kartų, gauname Muavro formulę

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = \rho^n e^{in\varphi}$$

Pastebėkime, kad ši formulė yra taikytina visiems $n \in Z$.
Taikydami Muavro bei Niutono binomo[2] formules, gauname trigonometrinių tapatybių įrodymus. Pavyzdžiui,

$$\begin{aligned} &(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \\ \cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - i\sin^3\varphi &= \\ &\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi. \end{aligned}$$

Taigi
$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi$, $\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi$.

Šaknies traukimas

Apibrėžkime n-tojo laipsnio šaknį iš kompleksinio skaičiaus
$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, kaip lygties

$$w^n = z$$

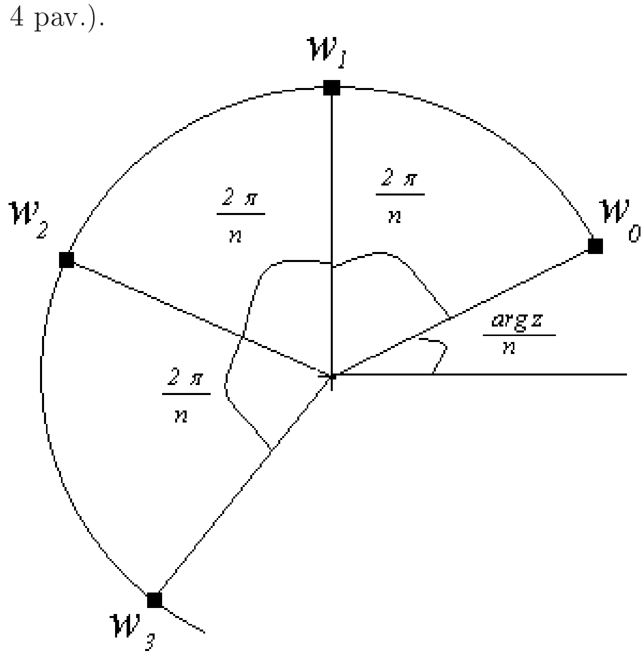
sprendinį.
Pažymėkime $|w| = r$, $\psi = \arg w$. Tada $w^n = r^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ arba $r^n = \rho$ ir $n\psi = \varphi + 2\pi k,\ k \in Z$. Iš čia gauname, kad $r = \sqrt[n]{\rho}$, $\psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n},\ k = 0, 1, \ldots, n-2$. Pastebėkime,

[2] $(a+ib)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}(ib) + C_n^2(bi)^2 + \cdots + C_n^k a^k (ib)^{n-k} + \cdots + (ib)^n$.

kad yra tik n skirtingų n- tojo laipsnio šaknies reikšmių w_0, w_1, $\cdots$, w_{n-1}:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z + 2\pi k}{n} + i\cos\frac{\arg z + 2\pi k}{n}\right) = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\arg z + 2\pi k}{n}},$$
$$k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Visos šios reikšmės yra taisyklingojo n-kampio, įbrėžto į apskritimą su centru koordinačių pradžioje ir spinduliu $\sqrt[n]{|z|}$, viršūnės (žr. 4 pav.).



4 pav. Šaknies reikšmės

1.3 Matricos ir determinantai

1.3.1 Pagrindiniai apibrėžimai

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = ||a_{ij}||_{m\times n}$$

matrica – skaičių lentelė,
m – eilučių skaičius,
n – stulpelių skaičius,
a_{ij} – matricos elementas,
i, j – elemento indeksai.
Pavyzdys
$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \pi & 0 \end{pmatrix}$
$m = 2$, $n = 3$,
$a_{11} = 3$, $a_{12} = 2$, $a_{13} = 0$, $a_{21} = -\frac{1}{2}$, $a_{22} = \pi$, $a_{23} = 0$.

Transponuota matrica

transponavimo operacija
$A = ||a_{ij}||_{m\times n}\,, A^T = ||a_{ji}||_{n\times m}$

Pavyzdys
$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \pi & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} \\ 2 & \pi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$m = 1$ – matrica eilutė $(a_1 \; a_2 \cdots a_n)$
$n = 1$ – matrica stulpelis $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}$

$(\alpha\ \beta\ \gamma)^T = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}^T = (\alpha\ \beta\ \gamma)$

$(A^T)^T = A$

Kvadratinė matrica

$m = n$ – kvadratinė matrica (n-tosios eilės):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ – kvadratinės matricos pagrindinė įstrižainė

$a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ – kvadratinės matricos šalutinė įstrižainė

A - kvadratinė ir $A^T = A$ – simetrinė matrica;

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ – simetrinė matrica;

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \\ -4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ – antisimetrinė matrica $a_{ij} = -a_{ji},\ \forall i \neq j$.

1.3.2 Operacijos su matricomis

Matricų sudėtis

Matricų $A = ||a_{ij}||_{m\times n}$ ir $B = ||b_{ij}||_{m\times n}$ sudėtis $A+B = ||a_{ij} + b_{ij}||_{m\times n}$

$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \pi & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ \frac{1}{2} & 8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 0 & \pi + 8 & 2 \end{pmatrix}$

Matricų sudėties savybės:

komutatyvumas $A + B = B + A$

asociatyvumas $(A+B)+C = A+(B+C)$
Neutralusis elementas – nulinė matrica:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$A + O = O + A = A, \ \forall A.$

Matricos daugyba iš skaičiaus

$\lambda \cdot A = ||\lambda a_{ij}||_{m\times n}$

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \pi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 5\pi & 0 \end{pmatrix}$$

asociatyvumas $\lambda \cdot (\mu A) = (\lambda\mu) \cdot A$
distributyvumas:
1) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$;
2) $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$;
Matricų skirtumas: $A - B = A + (-1) \cdot B$.

Matricų sandauga

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ b_{n1} & b_{b2} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix} = ||c_{ij}||_{m\times k},$$

$c_{ij} = \sum\limits_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj}, \ i = 1, 2, \ldots, m, \ j = 1, 2, \ldots, n.$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 10 & 11 \\ 7 & 14 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 8 + 2\cdot 10 + 3\cdot 7 & 1\cdot 9 + 2\cdot 11 + 3\cdot 14 \\ 4\cdot 8 + 5\cdot 10 + 6\cdot 7 & 4\cdot 9 + 5\cdot 11 + 6\cdot 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & 73 \\ 124 & 175 \end{pmatrix}$$

Neutralusis elementas – vienetinė matrica

$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$E_n = ||e_{ij}||_{n\times n}\,,\ e_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kai } i = j \\ 0, & \text{kai } i \neq j \end{cases}$

δ_{ij} – Kronekerio simbolis.

$A \cdot E_n = E_n \cdot A = A,\ \forall A$ – n-tosios eilės kvadratinė matrica.

Matricų daugyba nėra komutatyvi: bendru atveju $A \cdot B \neq B \cdot A$:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 12 & 13 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$

Matricų daugybos asociatyvumas:

$A(B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C,\ A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k-\text{kartų}}$

distributyvumas:

1) $(A + B) \cdot C = AC + BC$

2) $A \cdot (B + C) = AB + AC$

Sandaugos transponuota matrica $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

1.3.3 Antrosios ir trečiosios eilės determinantai

Antrosios eilės determinantas

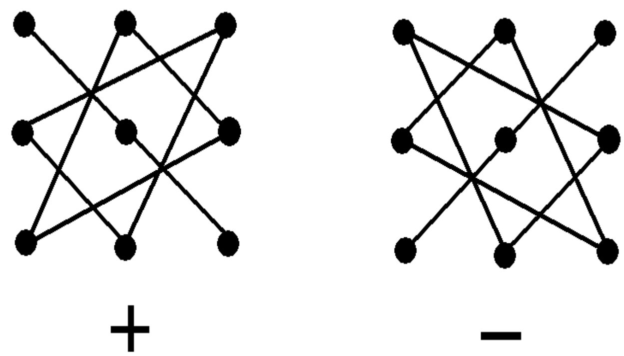
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 4 = 14 - 12 = 2$$

Trečiosios eilės determinantas

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$



5 pav. Trečiosios eilės determinanto skaičiavimo taisyklė

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$1\cdot 4\cdot 8+2\cdot 7\cdot 5+3\cdot 0\cdot 6-3\cdot 4\cdot 5-2\cdot 0\cdot 8-1\cdot 7\cdot 6=$$

$$32+70+0-60-0-42=0$$

1.3.4 Perstatos

Persatata vadinama aibės $\{1, 2, \ldots, n\}$ *bijekcija* f (abipus vienareikšmis atvaizdis) į save. T.y. perstatą galima apibrėžti lentele

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}.$$

Čia $f(j) \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Tą pačią perstatą f galima užrašyti $n!$ skirtingais būdais, sukeitus vietomis lentelės stulpelius

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Kai pirmoje lentelės eilutėje yra kėlinys $1, 2, \ldots, n$ lentelė yra vadinamas keitinio standartine išraiška.

Perstatų transpozicijos

Dviejų perstatų $(f(1), f(2), \ldots, f(n))$ elementų $f(i)$ ir $f(j)$ sukeitimas vietomis vadinamas jų *transpozicija*. Bet kurį kėlinį $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ galima gauti iš bet kurio kito tų pačių elementų $\{1, 2, \ldots, n\}$ kėlinio $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, atlikus baigtinį skaičių transpozicijų. Pavyzdžiui,

$$(1, 2, 3, 4, 5) \to (5, 2, 3, 4, 1) \to (5, 4, 3, 2, 1)$$

Kėlinių inversijos

Skaičiai $f(i)$ ir $f(j)$ sudaro kėlinio $(f(1), f(2), \ldots, f(n))$ *inversiją* (netvarką), jei $f(i) > f(j)$ ir $i < j$.

Pavyzdžiui, kėlinio $(1, 2, 3, 5, 4)$ inversiją sudaro skaičiai 5 ir 4. Kitų inversijų šis kėlinys neturi. Kėlinys $(1, 3, 5, 2, 4)$ turi tris inversijas: (3,2), (5,2), (5,4).

Kėlinys, turintis lyginį (nelyginį) inversijų skaičių, vadinamas *lyginiu* (*nelyginiu*).

Teiginys. Atlikus vieną kėlinio transpoziją, iš lyginio kėlinio gausime nelyginį ir atvirkščiai.
Įrodymas. Kai skaičiai i ir j yra gretimi, sukeitus juos vietomis gausime arba panaikinsime vieną inversiją. Taigi šiuo atveju teiginys

yra teisingas. Tarkime, kad turime $(\ldots, i, k_1, k_2, \ldots, k_s, j, \ldots)$. Tada atliekant $2s+1$ transpozicijų tik su gretimais elementais, gausime kėlinį $(\ldots, j, k_1, k_2, \ldots, k_s, i, \ldots)$. Kadangi $2s+1$ yra nelyginis skaičius, kėlinio lyginumas pasikeis.

Pavyzdys
$(1,3,5,2,4) \to (1,3,5,4,2)$. Buvo trys inversijos, dabar yra keturios: (3,2), (5,2), (5,4), (4,2).

Iš n elementų $\{1, 2, \ldots, n\}$ galima sudaryti $\frac{n!}{2}$ lyginių ir tiek pat nelyginių kėlinių.

Perstatų lyginumas

Keitinys vadinamas *lyginiu* (*nelyginiu*), kai jo eilučių inversijų suma yra lyginė (nelyginė).

Perstatos $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ pirmoji eilutė inversijų neturi, o antroji – turi tris: (2,1), (3,1), (4,1). Taigi ši perstata yra nelyginė: $0+3=3$. Ta pati perstata, užrašyta tokiu būdu $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ irgi yra nelyginė: $2+3=5$. Jei ji išreikšta taip $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, eilučių inversijų suma yra $3+2=5$.

Perstatos f eilučių inversijų sumą žymėsime $I(f)$.

1.3.5 n-tosios eilės determinantai

n-tosios eilės kvadratinės matricos $A = ||a_{ij}||_{n\times n}$ *determinantu* (žymėsime $\det A$ arba $|A|$) vadinamas skaičius

$$d = \sum_{(j_1, j_2, \ldots, j_n)} (-1)^{I(j_1, j_2, \ldots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

Sandaugos $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ yra vadinamos determinanto nariais.

Kai $n = 1$ turime tik vieną keitinį $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, kurio antroji eilutė inversijų neturi. Todėl $\det(a_{11}) = (-1)^0 a_{11} = a_{11}$. T. y. skaičiaus determinantas yra pats skaičius.

Kai $n = 2$ turime du skirtingus keitinius $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ir determinanto $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ nariai $a_{11}a_{22}$, $a_{12}a_{21}$ įeina į sumą su pliusu ir minusu atitinkamai.

Ketvirtosios eilės determinantas $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ turi $4! = 24$ narius $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$; iš jų 12 įeina į sumą su ženklu $(+)$ ir tiek pat – su $(-)$. Pavyzdžiui, narys $a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$ imamas su ženklu $(+)$: $(-1)^{I(3,4,1,2)} = (-1)^4 = 1$.

Determinantų savybės

1. $\det A^T = \det A$
Pastaba. Visos determinanto savybės, kurios galioja eilutėms, galioja ir stulpeliams.

2. Tarkime, kad kvadratinė matrica B gauta iš kvadratinės matricos A, sukeitus vietomis dvi jos eilutes. Tada $\det B = -\det A$, t. y. šie du determinantai skiriasi tik ženklu.
Išvada. Determinantas, turintis dvi vienodas eilutes, lygus nuliui. (Turime $|A| = -|A| \Rightarrow |A| = 0$).

3. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Išvada. Determinantas, turintis dvi proporcingas eilutes, lygus nuliui.

4. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}^{(1)} + a_{i1}^{(2)} & a_{i2}^{(1)} + a_{i2}^{(2)} & \dots & a_{in}^{(1)} + a_{in}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}^{(1)} & a_{i2}^{(1)} & \dots & a_{in}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}^{(2)} & a_{i2}^{(2)} & \dots & a_{in}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Išvada. Determinantas nesikeičia, jei prie vienos jo eilutės pridėti kitą jo eilutę.

Determinanto minorai ir adjunktai

Tarkime, kad $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \dots \leqslant i_k \leqslant n$ ir $1 \leqslant j_1 \leqslant j_2 \leqslant \dots \leqslant j_k \leqslant n$. Pasirinksime k $(1 \leqslant k < n)$ n-tosios eilės determinanto eilučių $i_1, i_2, \dots, i_k$ ir k stulpelių: $j_1, j_2, \dots, j_k$. Šių eilučių ir stulpelių sankirtoje gausime k-tosios eilės determinantą, kurį vadinsime *minoru* ir žymėsime

$$M = M(i_1, i_2, \dots, i_k; j_1, j_2, \dots, j_k) = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}$$

Pavyzdys

determinanto $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{vmatrix}$ minorai

$M(1,2;1,2) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$, $M(1,2;2,3) = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$,

$M(2,3;1,2) = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$

Išbraukus kvadratinės matricos A $i_1, i_2, \ldots, i_k$ eilutes bei $j_1, j_2, \ldots, j_k$ stulpelius, gausime $n-k$-tosios eilės kvadratinę matricą. Jos determinantą vadinsime minoro M *papildomuoju minoru* ir žymėsime $M' = M'(i_1, i_2, \ldots, i_k; j_1, j_2, \ldots, j_k)$. Determinanto $|A|$ minoro $M(i_1, i_2, \ldots, i_k; j_1, j_2, \ldots, j_k)$ *adjunktu* vadinsime sandauga

$$A_M = (-1)^{i_1+i_2+\ldots+i_k+j_1+j_2+\ldots+j_k} M'(i_1, i_2, \ldots, i_k; j_1, j_2, \ldots, j_k)$$

determinanto $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{vmatrix}$ minoro $M(1,2;1,2) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$
papildomasis minoras $M'(1,2;1,2) = 8$, adjunktas
$A_M = (-1)^{1+2+1+2} 8 = 8$.

Teorema. Kiekvienos determinanto $|A|$ sandaugos $A_M \cdot M(i_1, i_2, \ldots, i_k; j_1, j_2, \ldots, j_k)$ ženklas sutampa su to pačio nario
$a_{i'_1 j'_1} a_{i'_2 j'_2} \cdots a_{i'_{n-k} j'_{n-k}} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_k j_k}$ ženklu.

Laplaso teorema. Jei pasirinkti k determinanto eilučių ir sudaryti visus galimus k-tosios eilės minorus $M(i_1, i_2, \ldots, i_k; j_1, j_2, \ldots, j_k)$, tai

$$\sum_{1 \leqslant j_1 \leqslant j_2 \leqslant \cdots \leqslant j_k \leqslant n} A_M M(i_1, i_2, \ldots, i_k; j_1, j_2, \ldots, j_k) = \det A$$

determinanto

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 24 + (-20) + 0 - 24 - 0 - 30 = -50$ antrosios

bei trečiosios eilučių minorai bei adjunktai yra
$M(2,3;1,2) = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -12$, $A(2,3;1,2) = (-1)^{2+3+1+2}2 = 2$,
$M(2,3;1,3) = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = -20$, $A(2,3;1,3) = (-1)^{2+3+1+3}(-1) =$
1,
$M(2,3;2,3) = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -6$, $A(2,3;2,3) = (-1)^{2+3+2+3}1 = 1$.
Taigi
$A(2,3;1,2)M(2,3;1,2) + A(2,3;1,3)M(2,3;1,3)+$
$A(2,3;2,3)M(2,3;2,3) = 2 \cdot (-12) + 1 \cdot (-20) + 1 \cdot (-6) = -50$

Determinanto skleidimo formulės

Paimkime Laplaso teoremoje $k = 1$. Tai reiškia pasirinkti kurią nors vieną eilutę (arba sulpelį). Minorai $M(i;j)$ sutampa su determinanto elementais a_{ij}. Jų adjunktus žymėsime A_{ij}. Iš Laplaso teoremos gauname

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.$$

Šios formulės yra vadinamos determinanto skleidiniais i-tosios eilutės ir j-tojo stulpelio elementais.

Pastaba. Jei determinanto skleidimo formulėje paimti kurio nors stulpelio (eilutės) elementus ir **kito** sulpelio (eilutės) adjunktus, suma bus lygi nuliui.
Įrodymas. Sudarykime tokį determinantą

$$|A|_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Šis determinantas yra lygus $|A|_j = \sum_{i=1}^{n} b_i A_{ij}$. Paimkime vietoje elementų $b_1, b_2, \ldots, b_n$ k-tojo stulpelio ($k \neq j$ elementus. Šis determinantas turės du vienodus stulpelius ir todėl jis lygus nuliui. Taigi

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = 0, \; i \neq k, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} = 0, \; j \neq k.$$

Determinantų skaičiavimas

1. Skleidimo formulės taikymas

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} +$$

$$2 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -6 - 20 - 24 = -50$$

2. Deteminanto savybių taikymas
Atimkime iš determinanto antrojo stulpelio pirmąjį stulpelį, padaugintą iš 2:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

Dabar skleidžiame determinantą antrojo stulpelio elementais:

$$D = (-3) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 3(16 - 20) = -12$$

3. Laplaso teoremos taikymas

Iš determinanto $D = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & -3 \end{vmatrix}$ pirmųjų dviejų eilučių elementų galima sudaryti tik vieną nelygų nuliui minorą
$M = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -2.$
Taigi
$D = M \cdot A_M = -2(-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-6-4) = 20.$

1.3.6 Atvirkštinė matrica

Apibrėžimas. *Atvirkštine* kvadratinei matricai A vadiname tokią matricą A^{-1}, kad

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Kvadratinė matrica gali turėti tik vieną atvirkštinę matricą.
Įrodymas. Tarkime, kad A' kita atvirkštinė matrica. Tada
$A' = A'E = A'(AA^{-1}) = (A'A)A^{-1} = EA^{-1} = A^{-1}$.

Tarkime, kad $\det A = |A| \neq 0$. Tada

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Čia A_{ij} matricos A elementų adjunktai. Jie surašyti taip, kaip transponuotos matricos elementai.
Įrodymas išplaukia is Laplaso teoremos.

Jei $\det A = 0$ atvirkštinė matrica A^{-1} neegzistuoja.
Lema. $\det(AB) = \det A \det B$

Įrodymas. Tarkime, kad $\det A = 0$ ir A^{-1} egzistuoja. Tada $\det E = 1 = \det A \det A^{-1} = 0$ ir gauname prieštarą.

Raskime matricai $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ atvirkštinę matricą:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2,\ A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,\ A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3,\ A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,\ A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,\ A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{31}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{32}}{|A|} \\ \frac{A_{13}}{|A|} & \frac{A_{23}}{|A|} & \frac{A_{33}}{|A|} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{2} & \frac{-6}{2} & \frac{2}{2} \\ \frac{0}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{0}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Matricinės lygtys

$AX = B$, $X = A^T B$, $XA = B$, $X = BA^T$.

Išspręskime matricines lygtis
$AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $YA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, kai $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$, $X = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$,
$Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{7}{4} \end{pmatrix}$.

1.4 Tiesinių lygčių sistemos

1.4.1 Apibrėžimai

Tiesinių (pirmosios eilės) algebrinių m lygčių sistema su n nežinomaisiais x_1, x_2, …, x_n

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{m2n}x_n & = b_m. \end{cases}$$

Sistemos matrica: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$,

nežinomųjų matrica stulpelis (vektorius) $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$, dešinės pusės koeficentų vektorius (matrica stulpelis) $B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

sistemos matricinis pavidalas $AX = B$.

sistema **suderintoji** turi bent vieną sprendinį		sistema **nesuderintoji** neturi nė vieno sprendinio
sistema **apibrėžtoji** turi lygiai vieną sprendinį	sistema **neapibrėžtoji** turi daugiau, kaip vieną sprendinį (visada be galo daug)	

1.4.2 Sistema su kvadratine matrica

$n = m$, $A = ||a_{ij}||_{n \times n}$, $D = \det A = |A|$.

Atvirkštinės matricos metodas

$\det A \neq 0$, $AX = B$, $X = A^{-1}B$.
Sistema turi vienintelį sprendinį (apibrėžta), kadangi atvirkštinė matrica yra vienintelė.

$$\begin{cases} x + y = & 2 \\ x - y = & 0 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Taigi $x = 1$, $y = 1$.

Kramerio formulės

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \sum\limits_{s=1}^{n} A_{s1}b_s \\ \sum\limits_{s=1}^{n} A_{s2}b_s \\ \dots \\ \sum\limits_{s=1}^{n} A_{sn}b_s \end{pmatrix}, \ x_j = \frac{A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + \cdots + A_{nj}b_n}{\det A}$$

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{D_j}{D}.$$

$$\begin{cases} x + y = & 2 \\ x - y = & 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \ D = -2, \ D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2, \ y = \frac{D_2}{D} = \frac{-2}{-2} = 1.$$

1.4.3 Sistemos elementarieji pertvarkiai

Ekvivalenčios sistemos – sistemos su tais pačiais kintamaisiais ir turinčios tas pačias sprendinių aibes.

$$\begin{cases} x + y = & 2 \\ x - y = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = & 2 \\ x - y = & 0 \\ 2x = & 2 \ \ (\text{ sudėtos lygtys }) \\ 2y = & 2 \ \ (\text{ iš pirmosios lygties atimta antroji }) \end{cases}$$

1) lygčių keitimas vietomis;
2) lygties abiejų pusių dauginimas iš nelygaus nuliui skaičiaus;
3) lygties keitimas jos bei kitos lygties suma.

Elementariais pertvarkiais gaunama ekvivalenti sistema.

1.4.4 Gauso metodas

Trapecinė sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{rr}x_r + \cdots + a_{rn}x_n &= b_r, \\ 0 &= b_{r+1}, \\ &\cdots \\ 0 &= b_m. \end{aligned}$$

Bet kuri tiesinių lygčių sistema yra ekvivelenti tam tikrai trapecinei sistemai.

Kai $r = m = n$, turime trapecinės sistemos atskirą atvejį – trikampinę sistemą

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \cdots\cdots + a_{1r}x_r &= b_1, \\ a_{22}x_2 + a_{13}x_3 \cdots\cdots + a_{2r}x_r &= b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{r-1,r-1}x_{r-1} + a_{r-1,r}x_r &= b_{r-1}, \\ a_{rr}x_r &= b_r. \end{aligned}$$

Tarkime, kad $a_{rr} \neq 0$. Tada iš paskutinės lygties gauname $x_r = \frac{b_r}{a_{rr}}$. Jei $a_{r-1,r-1}x_{r-1} \neq 0$, iš priešpaskutinės lygties randame $x_{r-1} = \frac{b_{r-1}-a_{r-1,r}\frac{b_r}{a_{rr}}}{a_{r-1,r-1}}$ ir t. t. (Gauso metodo atvirkštinė eiga).
Taigi kai visi pagrindinės įstrižainės koeficientai $a_{ii} \neq 0$, sistema turi vienintelį sprendinį (apibrėžtoji).
Tarkime, kad $a_{rr} = 0$. Jei $b_r \neq 0$ sistema neturi sprendinių (nesuderintoji). Taigi jei trapecinėje sistemoje bent vienas koeficientas $b_{r+1}, b_{r+2}, \cdots, b_m$ nelygus nuliui, sistema yra nesuderinta.
Tarkime, kad $a_{rr} = b_r = 0$. Tai atitinka trapecinę sistemą su lygtimis $a_{r-1,r-1}x_{r-1} + a_{r-1,r}x_r = b_{r-1}$ ir $0 = b_r$.
Tokia sistema gali turėti be galo daug sprendinių (arba visai jų neturi, jei $a_{r-1,r-1} = a_{r-1,r} = 0$ ir $b_{r-1} \neq 0$).
Gauso metodo idėja – elementariais pervarkiais suvesti sistemą prie trikampinės (trapecinės).
Gauso metodo pirmasis žingsnis ($a_{11} \neq 0$, priešingu atveju galima sukeisti vietomis lygtis (matricos eilutes)).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} \end{pmatrix}$$

$a'_{2j} = a_{2j} - a_{1j}\frac{a_{21}}{a_{11}}$, $a'_{3j} = a_{3j} - a_{1j}\frac{a_{31}}{a_{11}}$, $\cdots$, $a'_{mj} = a_{mj} - a_{1j}\frac{a_{m1}}{a_{11}}$.
Gauso metodo antrame žingsnyje nagrinėjame matricą
$\begin{pmatrix} a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{m2} & \cdots & a'_{mn} \end{pmatrix}$, kuri turi viena eilute mažiau. Taigi po m žingsnių gausime trapecinę (trikampinę) matricą.

1.4.5 Matricos rangas

Sudarykime visus matricos $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ r-tosios eilės minorus

$$M_r = M(i_1, i_2, \cdots, i_r; j_1, j_2, \cdots, j_r) = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_r} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_r j_1} & a_{i_r j_2} & \cdots & a_{i_r j_r} \end{vmatrix}.$$

Pastebėkime, kad $r \leqslant \min\{m, n\}$. Nagrinėsime visus nelygius nuliui minorus $M_r \neq 0$. Didžiausias skaičius r (minoro eilė) yra vadinamas matricos *rangu*:

$$\text{rang } A = \max_{M_r \neq 0} r.$$

Pavyzdys

Matrica $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ turi keturis trečiosios eilės minorus. Jie visi yra lygūs nuliui: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 12 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 12 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \end{vmatrix} = 0$. Todėl rang $A < 3$. Matrica A turi $C_4^2 C_4^3 = 24$ antrosios eilės minorus. Kadangi ne visi jie yra lygūs nuliui (pavyzdžiui, $M(1,1;1,1) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$), rang $A = 2$.

Matricos A ir B, gaunamos viena iš kitos elementariaisiais pertvarkiais, yra vadinamos *ekvivalenčiomis*. Žymime $A \sim B$.
Ekvivalenčiųjų matricų rangai yra lygūs.
Įrodymas. Jei rang A tai egzistuoja matricos A r-tosios

$M(i_1, i_2, \cdots, i_r; j_1, j_2, \cdots, j_r) \neq 0$, o visi $r+1$-osios (ir aukštesnės) eilės minorai lygūs nuliui. Kadangi bet kuris matricos minoras, atliekant elementarius pertvarkius lieka lygus (arba nelygus, jei toks buvo) nuliui, tai rang $B = r$.

Pastebėkime, kad visus elementarius pervarkius galima atlikti ne tik su matricos eilutėmis (tai atitinka tiesinių lygčių sistemos pertvarkius), bet ir su stulpelius (kadangi determinantas nesikeičia transponuojant matricą). Dar pastebėkime, kad galima šalinti matricos nulines eilutes bei stulpelius.

Bet kuri matrica A, rang $A = r$ yra ekvivalenti $r - tosios$ eilės vienetinei matricai: $A \sim E_r$.

Pavyzdys

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.4.6 Bazinio minoro metodas

Tarkime, kad tiesinių lygčių sistemos

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{m2n}x_n & = b_m. \end{cases}$$

matricos $A = ||a_{ij}||_{m\times n}$ rang $A = r$. Tai reiškia, kad egzistuoja r-tosios eilės minoras $M_r \neq 0$. (Šį minorą vadiname *baziniu*). Tarkime, kad
$M(1,2,\ldots,r;1,2,\ldots,r) \neq 0$. (Priešingu atveju galima sukeisti vietomis sistemos lygtis bei pakeisti kintamųjų x_1, x_2, $\cdots$, x_n numerius. Jei $r < m$ – sistemoje yra lygčių, kurios gali būti eliminuotos (pašalintos) elementariais pertvarkiais. Todėl paliekame sistemoje r lygčių. (Vėliau parodysime, kad tai padaryti visada galima, jei sistema yra suderintoji). Jei $n = r$ turime sistemą su kvadratine matrica ir $\det A \neq 0$. Tokia sistema turi vienintelį sprendinį, kurį galima rasti Kramerio metodu. Išnagrinėkime atvejį, kai $n > r$ ir perrašykime sistemą taip:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r & = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r & = b_2 - a_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{r2n}x_r & = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots a_{rn}x_n. \end{cases}$$

Kintamuosius x_{r+1}, x_{r+2}, $\cdots$, x_n vadiname *laisvaisias*, o x_1, x_2, $\cdots$, x_r – *baziniais*. Taigi bazinių kintamųjų yra $r =$ rang A, o laisvųjų kintamųjų yra $n - r$. Pažymėkime $\delta_j = b_j - \sum\limits_{s=r+1}^{n} a_{js}x_s$. Kadangi $M_r \neq 0$, sistemą sprendžiame, taikydami Kramerio formules

$$x_j = \frac{1}{M_r}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \delta_1 & \cdots & a_{ir} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & \delta_r & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix},\ j = 1,2,\ldots,r.$$

Skleisdami šiuos determinantus j-tojo stulpelio elementais, gauname *bendrojo sprendinio* formules:

$$x_j = \gamma_j^0 + \gamma_j^{r+1}x_{r+1} + \cdots + \gamma_j^n x_n,\ j = 1,2,\ldots,r.$$

Čia γ_j^i, $i = r+1, r+2, \ldots, n$ – prikalauso tik nuo koeficientų a_{ij}, o γ_j^0 dar ir nuo b_1, b_2, $\cdots$, b_r. Kai laisvieji kintamieji x_{r+1}, $\cdots$, x_n

įgyja konkrečias reikšmes, gauname sistemos *atskirąjį sprendinį*. Taigi kai bent vienas koeficientas $\gamma_j^i \neq 0$ sistema turi be galo daug sprendinių.

Pavyzdys

$$\begin{cases} x+y+z-w = & 2, \\ x-y-z+w = & 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y = & 2-z+w, \\ x-y = & z-w. \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2-z+w & 1 \\ z-w & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2-z+w \\ 1 & z-w \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = 1-z+w.$$

Bendrasis sprendinys $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\alpha+\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$;

atskirieji sprendiniai $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.4.7 Homogogeninė lygčių sistema

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0, \ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Homogeninė sistema visada suderinta (turi nulinį (kitaip matematikoje vadinamą trivialųjį) sprendinį).
$r =$ rang A, bendrasis sprendinys
$x_j = \delta_j^{r+1} x_{r+1} + \delta_j^{r+2} x_{r+2} + \cdots + \delta_j^n$, $j = 1, 2, \ldots, r$.
Fundamentalioji sprendinių sistema

$$\begin{pmatrix} \delta_1^{r+1} \\ \delta_2^{r+1} \\ 0 \\ \cdots \\ \delta_r^{r+1} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \delta_1^{r+2} \\ \delta_2^{r+2} \\ 0 \\ \cdots \\ \delta_r^{r+2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \delta_1^{r+3} \\ \delta_2^{r+3} \\ 0 \\ \cdots \\ \delta_r^{r+3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \delta_1^{n-1} \\ \delta_2^{n-1} \\ 0 \\ \cdots \\ \delta_r^{n-1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \delta_1^{n} \\ \delta_2^{n} \\ 0 \\ \cdots \\ \delta_r^{n} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pažymėję šiuos atskiruosius sprendinius H_1, H_2, $\cdots$, H_{n-r}, bet kurį homogeninės sistemos sprendinį galime užrašyti taip
$(x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)^T = C_1 H_1 + C_2 H_2 + \cdots + C_{n-r} H_{n-r}$,
C_j – konstantos. Taigi homogeninė sistema turi vienintelį nulinį sprendinį tada ir tik tada, kai rang $A = n$.

1.4.8 Kronekerio ir Kapelio teorema

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Sistemos matrica $A = ||a_{ij}||_{m \times n}$, išplėstoji matrica
$$(A|B) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Teorema. Tiesinių lygčių sistema yra suderinta tada ir tik tada, kai rang $A = \text{rang}\ (A|B)$.
Sistema yra apibrėžta, kai rang $A = n$.

Bendrojo sprendinio struktūra

Nehomogeninės lygties bendrasis sprendinys	$=$	*Homogeninės lygties bendrasis sprendinys*	$+$	*Nehomogeninės lygties atskirasis sprendinys*

1.5 Vektoriai

1.5.1 Pagrindinės sąvokos

Skaliariniai ir vektoriniai dydžiai.
Atkarpos ilgis ir kryptis.
Lygūs vektoriai.
Koliniarieji ir komplanarieji vektoriai.
Vektorių sudėtis ir atimtis.
Vektoriaus dauginimas iš skaičiaus.
Nulinis vektorius.

1.5.2 Veiksmų su vektoriais savybės

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (vektorių sudėties komutatyvumas);
2. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{b} + (\vec{a} + \vec{c})$ (vektorių sudėties asociatyvumas);
3. $\exists \vec{0} : \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}\ \forall \vec{a}$ (nulinio vektoriaus egzistavimas);
4. $\exists (-\vec{a}) :\ \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ (priešingo vektoriaus egzistavimas);
5. $(\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a})\ \forall \alpha, \beta, \vec{a}$ (skaičių daugybos ir vektoriaus daugybos iš skaičiaus distributyvumas);
6. $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}\ \forall \alpha, \beta, \vec{a}$ (skaičių sudėties ir vektoriaus daugybos iš skaičiaus distributyvumas);
7. $\alpha \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}\ \forall \alpha, \vec{a}, \vec{b}$ (daugybos iš skaičiaus ir vektorių

sudėties distributyvumas);
8. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ (vektoriaus daugyba iš vieneto).

1.5.3 Tiesinė erdvė

Tarkime, kad algebrinė struktūra $(A, +)$ yra grupė ir jos elementams apibėžta daugyba iš skaičiaus: $\lambda a \in A\, \forall a \in A\, \forall \lambda \in R$(arba C). Jei daugyba iš skaičiaus turi 5. – 8. savybes, struktūrą $(A, +)$ vadiname *tiesine* (vektorine) erdve, o jos elementus – *vektoriais.*

Pavyzdys

Aibėje $R^n = R \times \cdots \times R = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_j \in R\}$ apibrėžtos operacijos: $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$,
$\lambda\vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda_n)$.
Šios aibės elementus vadiname n-mačiais vektoriais.

Pavyzdys

Tarkime, kad $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ – n-tojo laipsnio polinomas. Tada operacijų $P_n(x) + Q_n(x)$ ir $\lambda P_n(x)$ rezultatas irgi yra n-tojo laipsnio polinomai ir šios operacijos turi 1. – 8. savybes. Todėl aibė $\{P_n(x)\}$ yra vektorinė erdvė.

1.5.4 Vektorių tiesinis darinys

Tarkime, kad turime n vektorių $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\cdots$, $\vec{a}_n$ ir skaičių α_1, α_2, $\cdots$, α_n. Vektorius

$$\vec{y} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n$$

vadinamas vektorių $\vec{a}_j,\ j = 1, 2, \ldots, n$ *tiesiniu dariniu (kombinacija)*; skaičiai α_j – tiesinio darinio *koeficientai.*

Tiesinių darinių savybės

Jei visi vektoriai $\vec{a}_j$ yra kolinearūs vektoriui $\vec{z}$, tai tiesinis darinys $\vec{y} = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j\vec{a}_j$ irgi kolinearus vektoriui $\vec{z}$.

Jei vektoriai $\vec{a}_j$ yra komplanarūs, vektoriai $\vec{y} = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j\vec{a}_j$, $\vec{a}_1$, $\ldots$,

$\vec{a}_n$ irgi yra komplanarūs.

Sakome, kad vektorius $\vec{y}$ yra *išreikštas* vektoriais $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$, kai $\vec{y} = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{a}_j$.

1.5.5 Bazės erdvėje ir plokštumoje

Baze erdvėje vadinami trys nekomplanarūs vektoriai $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ (paimti nurodyta tvarka).
Baze plokštumoje vadinami bet kurie du nekolinearūs vektoriai (paimti nurodyta tvarka).
Baze tiesėje vadinamas bet kuris nenulinis vektorius šioje tiesėje.
Kai $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ yra bazė, bet kuris vektorius $\vec{x}$ gali būti *vienareikšmiškai* išreikštas bazės vektoriais:

$$\vec{x} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}.$$

Skaičiai x_1, x_2, x_3 yra vadinami vektoriaus $\vec{x}$ *koordinatėmis* (komponentėmis) bazėje $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$.
Vektoriaus koordinatės priklauso nuo bazės. Toje pačioje bazėje koordinatės nustatomos vienareikšmiškai.
Lygūs vektoriai turi vienodas koordinates.
Dauginant vektorių iš skaičiaus, visos jo koordinatės dauginamos iš to skaičiaus:

$$\alpha \cdot \vec{x} = \alpha \cdot (x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) = (\alpha \cdot x_1)\vec{e}_1 + (\alpha \cdot x_2)\vec{e}_2 + (\alpha \cdot x_3)\vec{e}_3.$$

Sudedamų vektorių koordinatės sudedamos:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) + (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) = \\ (a_1 + b_1)\vec{e_1} + (a_2 + b_2)\vec{e_2} + (a_3 + b_3)\vec{e_3}.$$

1.5.6 Vektorių tiesinė priklausomybė

Vektoriai $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ yra vadinami tiesiškai priklausomais, kai egzituoja tokie koeficientai $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ (ne visi lygūs nuliui: $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2 \neq 0$), kad

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}.$$

Teorema. Vektorių sistema $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$ yra tiesiškai priklausoma tada ir tik tada, kai $\exists\vec{a}_i$:

$$a_i = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_{i-1}\vec{a}_{i-1} + \lambda_{i+1}\vec{a}_{i+1} + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n.$$

Įrodymas. Tarkime, kad vektoriai $x_1, \ldots, x_n$ yra tiesiškai priklausomi. Tada $\exists\alpha_1, \ldots, \alpha_n$:

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \cdots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}.$$

Kadangi ne visi $\alpha_j = 0$, pasirinkime $\alpha_i \neq 0$. Taigi

$$\vec{a}_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i}\vec{a}_1 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i}\vec{a}_n.$$

Todėl turime $\lambda_j = -\frac{\alpha_j}{\alpha_i}$, kai $j \neq i$, ir $\lambda_i = 1$.
Tarkime, kad $\exists\vec{a}_i$: $a_i = \lambda_1\vec{a}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n$. Tada paimkime $\alpha_j = \lambda_j$, kai $j \neq i$ ir $\lambda_i = -1$ ir gausime, kad vektoriai yra tiesiškai priklausomi.

Tarkime, kad

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m \in R^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_j \in R,\ j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Išsiaškinkime, ar jie yra tiesiškai priklausomi.

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Iš čia gauname tiesinių homogeninių lygčių sistemą:

$$\begin{aligned}
a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1m}\alpha_m &= 0\\
a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2m}\alpha_m &= 0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\\
a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \cdots + a_{nm}\alpha_m &= 0
\end{aligned}$$

Vektoriai $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$ yra tiesiškai priklausomi tada ir tik tada, kai ši homogeninė sistema turi nenulinį sprendinį. Taigi kai $m = \operatorname{rang} A$ sistema turi vienintelį nulinį sprendinį ir vektoriai yra tiesiškai nepriklausomi. Pastebėję, kad $\min\{m, n\} \geqslant \operatorname{rang} A$, gauname, kad daugiau kaip n n-mačių vektorių visada yra tiesiškai priklausomi. Pavyzdžiui, visada yra priklausomi bet kurie 3 vektoriai plokštumoje arba 4 vektoriai erdvėje.

1.5.7 Dekarto koordinatės

Dekarto koordinatėmis erdvėje vadinamas nurodytas taškas ir nurodyta erdvės bazė. Nurodytas taškas vadinamas *koordinačių pradžia.* Tiesės, lygiagrečios bazės vektoriams vadinamos: pirmoji – *abscisių* ašis, antroji – *ordinačių* ašis ir trečioji – aplikačių.

Tarkime, kad O yra koordinačių pradžios taškas, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ – bazės vektoriai. Bet kurio erdvės taško M koordinatėmis nagrinėjamoje koordinačių sistemoje vadinsime vektoriaus $\overrightarrow{OM}$ (*vektoriaus spindulio*) koordinates:

$$\overrightarrow{OM} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3.$$

Skaičiai α_1, α_2, α_3 vadinami vektoriaus taško M koordinatėmis (abscisė, ordinatė ir aplikatė).

Raskime vektoriaus $\vec{AB}$ koordinates:

$$\begin{aligned}\vec{AB}=\vec{AO}+\vec{OB}=\vec{OB}-\vec{OA}=\\ =b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2+b_3\vec{e}_3-a_1\vec{e}_1-a_2\vec{e}_2-a_3\vec{e}_3=\\ (b_1-a_1)\vec{e}_1+(b_2-a_2)\vec{e}_2+(b_3-a_3)\vec{e}_3\end{aligned}$$

Sakome, kad bazė $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ yra *ortogonalioji*, kai $\vec{e}_i \perp \vec{e}_j$, $(\forall i \neq j)$. Jei dar $|\vec{e}_j| = 1$, bazė – ortonormuotuoji. Dekarto koordinatės su ortonormuotąja baze vadinamos stačiakampėmis koordinatėmis.

1.5.8 Atkarpos dalijimas duotuoju santykiu

Tarkime, kad $A(x_a, y_a, z_a) \neq B(x_b, y_b, z_b)$. Raskime tokį atkarpos AB tašką $M(x, y, z)$, kad $\frac{|AM|}{|AB|} = \lambda$, $0 < \lambda < 1$.

Turime

$$\vec{AM}=\lambda\,\vec{AB}\,.$$

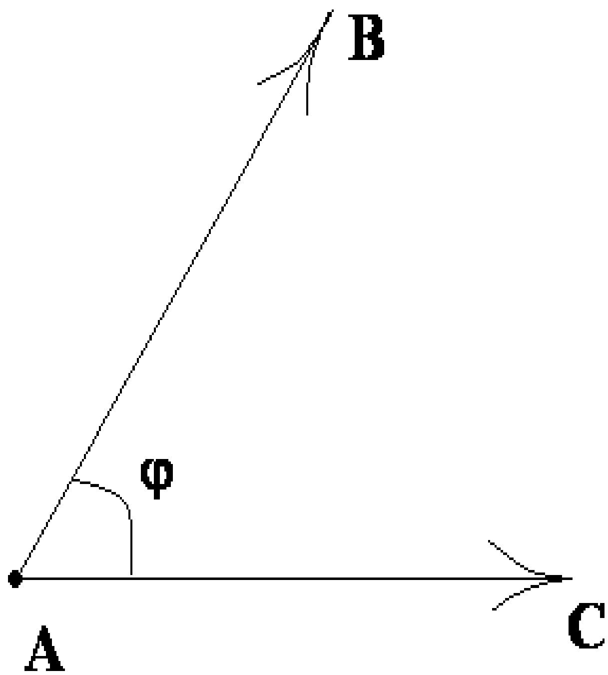
Perrašykime šią lygybę koordinatėmis $(x - x_a, y - y_a, z - z_a) = \lambda(x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a)$. Taigi

$$x = x_a + \lambda(x_b - x_a),\ y = y_a + \lambda(y_b - y_a),\ z = z_a + \lambda(z_b - z_a).$$

Kai $\lambda = \frac{1}{2}$ M yra atkarpos vidurio taškas: $M(\frac{x_a+x_b}{2}, \frac{y_a+y_b}{2}, \frac{z_a+z_b}{2})$. Kai $\lambda = 0$ $M = A$ ir kai $\lambda = 1$ $M = B$. Pastebėkime, kad M yra tiesės AB taškas, kuris nepriklauso atkarpai AB, jei $\lambda > 1$ arba $\lambda < 0$. Pavyzdžiui, kai $\lambda = -1$, turime $\vec{AM}=-\vec{AB}$ ir A yra atkarpos MB vidurio taškas. Kai $\lambda = 2$ B yra atkarpos AM vidurio taškas.

1.5.9 Vektorių skaliarinė sandauga

Susitarkime, kad kampas φ tarp vektorių $\vec{AB}$ ir $\vec{AC}$ yra intervale $0 \leq \varphi \leq \pi$.



6 pav. Kampas tarp vektorių

Apibrėžimas
Dviejų vektorių $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$ **skaliarine sandauga** vadinamas skaičius

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos\varphi$$

Skaliarinės sandaugos savybės
1. $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ (komutatyvumas).
2. $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2$.

3. $(\vec{a},\vec{b})=0$ tada ir tik tada, kai $\vec{a}\perp\vec{b}$ arba $\vec{a}=\vec{0}$, arba $\vec{a}=\vec{0}$.
4. Jei $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ yra ortonormuotoji bazė, tai $(\vec{e}_i,\vec{e}_j)=\delta_{ij}$.[3]
5. $(\alpha\vec{a},\vec{b})=\alpha(\vec{a},\vec{b})$.
6. $(\vec{a}+\vec{b},\vec{c})=(\vec{a},\vec{c})+(\vec{b},\vec{c})$.
7. Jei $\vec{a}=\alpha_1\vec{e}_1+\alpha_2\vec{e}_2+\alpha_3\vec{e}_3$, $\vec{b}=\beta_1\vec{e}_1+\beta_2\vec{e}_2+\beta_3\vec{e}_3$ ir $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ yra ortonormuotoji bazė, tai $(\vec{a},\vec{b})=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3$.

Taigi, kai $\vec{a}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ – vektoriaus koordinatės ortonormuotoje bazėje, jo ilgis

$$|\vec{a}|=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}.$$

Kampo tarp vektorių kosinusas šiuo atveju išreiškiamas taip:

$$\cos\varphi=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\left|\cdot\vec{b}\right|}.$$

Atstumas tarp taškų $X(x_1,x_2,x_3)$ ir $Y(y_1,y_2,y_3)$ Dekarto stačiakampėje koordinačių sistemoje lygus

$$\left|\overrightarrow{XY}\right|=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2}.$$

Krypties kosinusai

Tarkime, kad $\vec{i}=(1,0,0)$, $\vec{j}=(0,1,0)$, $\vec{k}=(0,0,1)$ – Dekarto stačiakampių koordinačių sistemos ašyse esantys vienetiniai vektoriai (**ortai**). Tada

$$(\vec{i},\vec{i})=(\vec{j},\vec{j})=(\vec{k},\vec{k})=1,$$
$$(\vec{i},\vec{j})=(\vec{i},\vec{k})=(\vec{j},\vec{k})=0.$$

Kai $\left|\overrightarrow{XY}^0\right|=1$, turime $\left(\overrightarrow{XY}^0,\vec{i}\right)=\cos\alpha$, $\left(\overrightarrow{XY}^0,\vec{j}\right)=\cos\beta$, $\left(\overrightarrow{XY}^0,\vec{k}\right)=\cos\gamma$. Taigi $\overrightarrow{XY}^0=\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$.

[3]Priminkime, kad $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{kai } i=j\\ 0, & \text{kai } i\neq j\end{cases}$ – Kronekerio simbolis.

Aksiominis skaliarinės sandaugos apibrėžimas

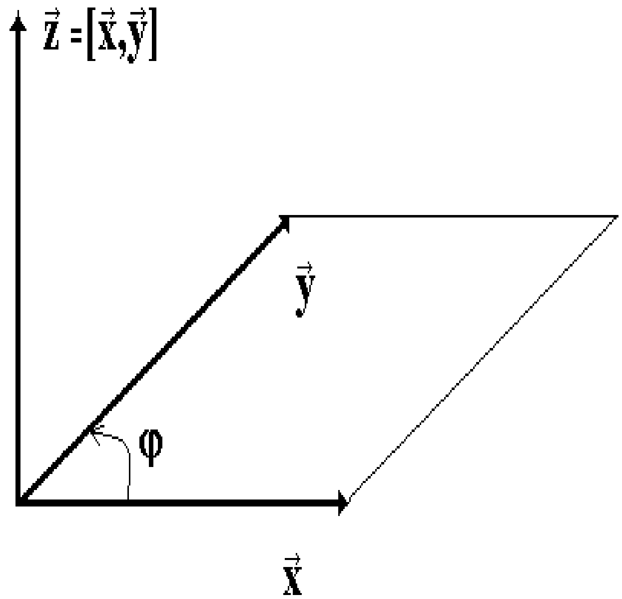
Tarkime, kad E vektorinė erdvė. Skaičius $(\vec{x}, \vec{y})$ $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in E)$ yra vadinamas vektorių $\vec{x}$ ir $\vec{y}$ **skaliarine sandauga**, kai galioja šios aksiomos:
1. $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$;
2. $(\lambda\vec{x}, \vec{y}) = \lambda(\vec{x}, \vec{y})$;
3. $(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z})$;
4. $(\vec{x}, \vec{x}) \geqslant 0,\ \vec{x} \neq \vec{0};\ (\vec{0}, \vec{0}) = 0.$

Realioji vektorinė erdvė, kurioje apibrėžta skaliarinė sandauga, vadinama **Euklido erdve**.

Skaliarinę sandaugą galima apibrėžti įvairiais būdais.

1.5.10 Vektorių vektorinė sandauga

Apibrėžimas
Vektorių $\vec{x}$ ir $\vec{y}$ **vektorine sandauga** vadinamas toks vektorius $[\vec{x}, \vec{y}] = \vec{z}$, kad
1) $|\vec{z}| = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \sin\varphi$, φ – kampas tarp vektorių $\vec{x}$ ir $\vec{y}$;
2) $\vec{z} \perp \vec{x}$ ir $\vec{z} \perp \vec{y}$;
3) vektoriaus $\vec{z}$ kryptį parinkime taip, kad žiūrint iš $\vec{z}$ galo, vektorius $\vec{a}$ sutaps su vektoriumi $\vec{y}$, pasukus jį kampu φ prieš laikrodžio rodyklę.



7 pav. Vektorių vektorinė sandauga 0

Pastebėkime, kad vektorinė sandauga antikomutatyvi: $[\vec{y}, \vec{x}] = -[\vec{x}, \vec{y}]$. Jos geometrinė prasmė: vektoriaus $\vec{z} = [\vec{x}, \vec{y}]$ ilgis $|\vec{z}| = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \sin\varphi$ lygus lygiagretainio, sudaromo vektoriais $\vec{x}$ ir $\vec{y}$, plotui.

Vektorinė sandauga kartais žymima $\vec{x} \times \vec{y}$, o skaliarinė – $\vec{x} \cdot \vec{y}$.

Iš vektorinės sandaugos apibrėžimo išplaukia:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0},$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k},\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i},\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j},$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k},\ \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i},\ \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}.$$

Reiškimas koordinatėmis

$$\begin{aligned}
\vec{a}\times\vec{b} = (a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}) = \\
= a_xb_x(\vec{i}\times\vec{i}) + a_xb_y(\vec{i}\times\vec{j}) + a_xb_z(\vec{i}\times\vec{k}) + \\
+a_yb_x(\vec{j}\times\vec{i}) + a_yb_y(\vec{j}\times\vec{j}) + a_yb_z(\vec{j}\times\vec{k}) + \\
a_zb_x(\vec{k}\times\vec{i}) + a_zb_y(\vec{k}\times\vec{j}) + a_zb_z(\vec{k}\times\vec{k}) = \\
= \vec{i}(a_yb_z - a_zb_y) + \vec{j}(a_zb_x - a_xb_z) + \vec{k}(a_xb_y - a_yb_x) = \\
= \vec{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Taigi

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

1.5.11 Vektorių mišrioji sandauga

Apibrėžimas
Trijų vektorių $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ **mišriąja sandauga** vadinamas skaičius $(\vec{a},[\vec{b},\vec{c}])$, kurį žymėsime ir taip $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

Skaičiaus $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ modulis lygus gretasienio, sudaryto vektoriais $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ tūriui. Mišrioji nenulinių vektorių sandauga lygi nuliui tada ir tik tada, kai vektoriai yra nekomplanarūs.

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

1.6 Tiesės ir plokštumos

1.6.1 Lygtys ir taškų aibės

Sferos lygtis

Tarkime, kad erdvėje apibrėžta Dekarto stačiakampė koordinačių sistema $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Sfera su centru taške $C(x_0,y_0,z_0)$ ir spinduliu r yra erdvės taškų, kurių atstumas nuo taško C lygus r, aibė. Pažymėkime bet kurio tokio taško M koordinates x, y, z. Taigi

$$\left|\overrightarrow{CM}\right| = r.$$

Arba

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} = r.$$

Iš čia gauname sferos lygtį duotoje koordinačių sistemoje

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = r^2.$$

Tarkime, kad $z = c$. Tada turime apskritimo lygtį

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2.$$

Bendru atveju linijos lygtis plokštumoje užrašoma taip:

$$F(x,y) = 0.$$

Pastebėkime, kad atvejį $z = c$ reikia skirti nuo atvejo z - bet kuris realusis skaičius, kai turime cilindro lygtį:

$$F(x,y) = 0,\ x,y,z \in R$$

Erdvės taškų aibės gali būti išreikštos lygtimis ir nelygybėmis

$$F(x,y,z) = 0,\ G(x,y,z) \geqslant 0.$$

Pavyzdžiui, rutulio su centru taške $C(x_0, y_0, z_0)$ ir spinduliu r taškams galioja nelygybė

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \leqslant r^2.$$

Pastebėkime dar, kad lygtis

$$F(x,y,z) - |F(x,y,z)| = 0$$

ekvivalenti nelygybei $F(x,y,z) \geqslant 0$.

Algebrinės lygtys ir paviršiai

Apibrėžimas
Algebrinis paviršius – taškų, apibrėžtų lygtimi

$$A_1 x^{k_1} y^{l_1} z^{m_1} + A_2 x^{k_2} y^{l_2} z^{m_2} + \cdots + A_s x^{k_s} y^{l_s} z^{m_s} = 0$$

aibė. Skaičius $n = \max\limits_{j=1,2,\ldots,s} k_j + l_j + m_j$ vadinamas šios algebrinės lygties *eile* ir algebrinio paviršiaus *laipsniu*. Kai į lygtį neįeina kintamasis z, turime n - tosios eilės (laipsnio) *linija*:

$$A_1 x^{k_1} y^{l_1} + A_2 x^{k_2} y^{l_2} + \cdots + A_s x^{k_s} y^{l_s} = 0. \qquad (*)$$

Teorema (eilės *invariantiškumas*)
Jei linija (paviršius) kurioje nors Dekarto koordinačių sistemoje aprašoma (*) lygtimi, tai bet kurioje kitoje Dekarto koordinačių sistemoje ji išreiškiama to pačio pavidalo ir tos pačios eilės lygtimi.
Įrodymas. Koordinačių sistemos pakeitimas reiškia naujų koordinačių įvedimą:

$$\begin{aligned} x &= a_1^1 x' + a_2^1 y' + a_0^1, \\ y &= a_1^2 x' + a_2^2 y' + a_0^2. \end{aligned}$$

Įstačius šiuos reiškinius į (*) lygtį, gausime to pačio laipsnio polinomą.

1.6.2 Parametrinės kreivės ir paviršiaus lygtys

Tarkime, kad kreivė yra judančio taško trajektorija. Jei kiekvienu laiko t momentu yra žinoma taško (x, y, z) padėtis, tai jo koordinatės yra parametro t funkcijos

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \chi(t), \quad t \in R. \end{cases}$$

Šios lygtys yra vadinamos kreivės erdvėje *parametrinėmis lygtimis*. Kai nėra koordinatės z, turime kreivę plokštumoje. Parametro t fizikinė prasmė nėra svarbi.

Pavyzdžiai

Parametrinės lygtys

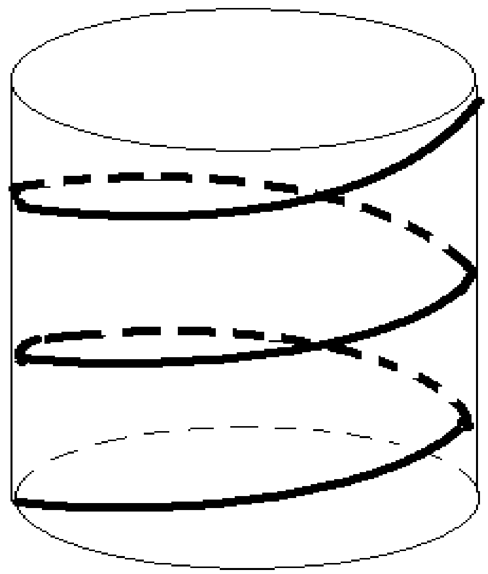
$$x = r\cos t, \; y = r\sin t$$

apibrėžia apskritimą plokštumoje su centru koordinačių pradžioje ir spinduliu r.

Tarkime, kad turime dar ir tokį kintamąjį z:

$$x = r\cos t, \; y = r\sin t, \; z = at.$$

Tai yra vadinamos sraigtinės kreivės parametrinės lygtys. Ji priklauso spindulio r cilindrui.



8 pav. Sraigtinė kreivė ir cilindrinis paviršius

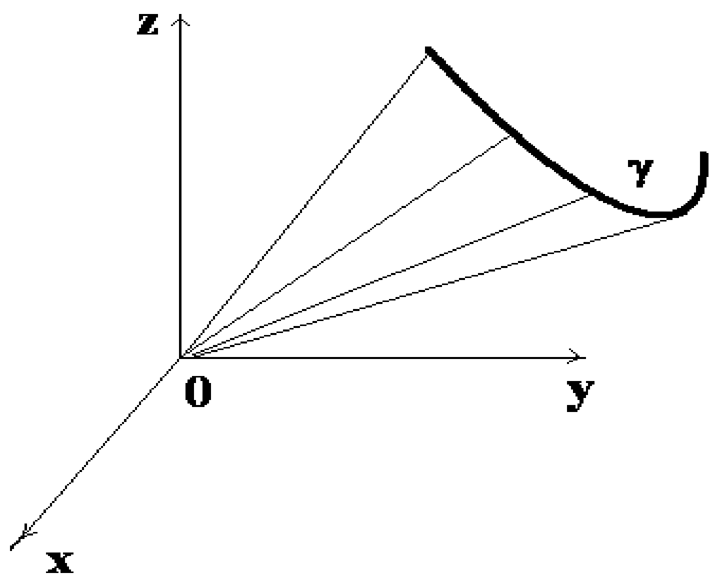
Apibendrinkime parametrines lygtis ir įveskime du parametrus:

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v), \\ z = \chi(u, v), \quad (u, v) \in R \times R. \end{cases}$$

Šios lygtys vadinamos paviršiaus parametinėmis lygtimis.

Kūgio parametrinės lygtys

$$\begin{cases} x = vf(u), \\ y = vg(u), \\ z = vh(u), \quad (u, v) \in R \times R. \end{cases}$$



9 pav. Kūgis

1.6.3 Tiesių ir plokštumų lygtys

Pirmosios eilės linijos ir paviršiai

Pirmosios eilės arba **tiesine** lygtimi vadinama

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Reikalaujama dar $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Kai į lygtį neįeina z, turime tiesės tašką (x, y) plokštumoje.

Teorema. *Pirmosios eilės lygtimi išreiškima tam tikra plokštuma (tiesė). Bet kurios plokštumos (tiesės) taškai yra pirmosios eilės lygties sprendiniai.*

Tiesės parametrinės lygtys

Tarkime, kad tiesė l eina per tašką $A(a_x, a_y, a_z)$ lygiagrečiai vektoriui $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$. Tada bet kuriam tiesės l taškui $M(x, y, z)$ turime $\overrightarrow{AM} \,||\vec{r}$. Arba

$$\overrightarrow{AM} = t\vec{r}, \; t \in R.$$

Taigi turime tiesės l **parametrines lygtis**:

$$\begin{cases} x - a_x = tr_x, \\ y - a_y = tr_y, \\ z - a_z = tr_z, \quad t \in R \end{cases}.$$

Tarkime, kad nagrinėjama tiesė plokštumoje $z = a_z$. Tada tiesės lygtį pertvarkome taip:

$$\frac{x - a_x}{r_y} = \frac{x - a_y}{r_x} = t.$$

Pažymėję $A = \frac{1}{r_y}$, $B = -\frac{1}{r_x}$, gauname tiesės lygtį

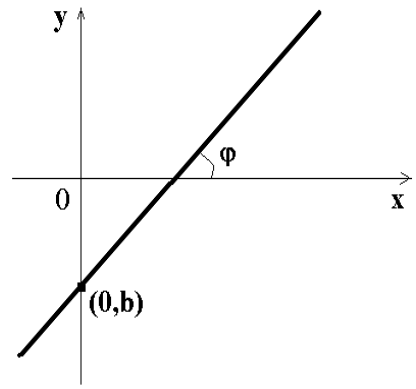
$$A(x - a_x) + B(y - a_y) = 0$$

arba

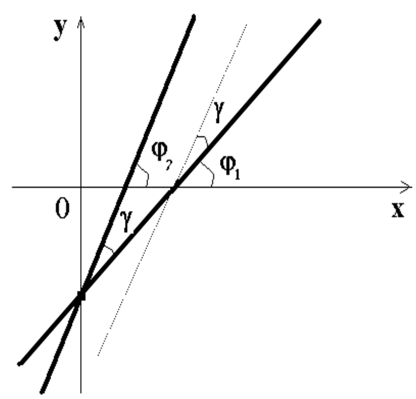
$$Ax + By + C = 0, \quad C = -Aa_x - Ba_y.$$

Tarkime, kad $B \neq 0$. Tada tiesės lygtį galima išspręsti ordinatės atžvilgiu:

$$y = kx + b, \quad k = -\frac{A}{B}, \; b = -\frac{C}{B}.$$



10 pav. Tiesė plokštumoje



11 pav. Kampas tarp tiesių plokštumoje

Koeficientas $k = \tan\varphi$ vadinamas *tiesės krypties koeficientu.* Kampas tarp dviejų tiesių $y = k_1x+b_1$ ir $y = k_2x+b_2$ plokštumoje

$\gamma = \varphi_2 - \varphi_1$ ir gali būti apskaičiuotas taip:

$$\tan\gamma = \frac{\tan\varphi_2 - \tan\varphi_1}{1 + \tan\varphi_1 \tan\varphi_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Tiesės yra statmenos, kai $\gamma = \frac{\pi}{2}$ arba $\tan\gamma = \infty$. Taigi turime $1 + k_1 k_2 = 0$ arba

$$\boxed{k_1 = -\frac{1}{k_2}}$$

Tiesės yra lygiagrečios, kai $\gamma = 0$ t. y.

$$\boxed{k_1 = k_2}$$

Plokštumos parametrinės lygtys

Tarkime, kad plokštuma α eina per tašką $A(a_x, a_y, a_z)$ lygiagrečiai nekoliniearіems vektoriams $\vec{r^1} = (r_x^1, r_y^1, r_z^1)$ ir $\vec{r^2} = (r_x^2, r_y^2, r_z^2)$. Tada bet kuriam plokštumos α taškui $M(x, y, z)$ vektorius $\overrightarrow{AM}$ yra plokštumoje α ir gali būti išreikštas nekolinieariais vektoriais $\vec{r^1}$, $\vec{r^2}$:

$$\overrightarrow{AM} = t^1\vec{r^1} + t^2\vec{r^2}.$$

Taigi gauname plokštumos α **parametrines lygtis**:

$$\begin{cases} x - a_x = t^1 r_x^1 + t^2 r_x^2, \\ y - a_y = t^1 r_y^1 + t^2 r_y^2, \\ z - a_z = t^1 r_z^1 + t^2 r_z^2, \quad t \in R \end{cases}.$$

Tiesės ir plokštumos vektorinės lygtys

Tarkime, kad plokštuma α eina per taška $R_0(x_0, y_0, z_0)$ ir yra statmena vektoriui $\vec{n} = (A, B, C)$, kuris vadinamas plokštumos α **normaliuoju vektoriumi**. Pažymėkime vektorių spindulį $\overrightarrow{OR_0} = \vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Esant bet kuriam plokštumos taškui $R(x, y, z)$, vektorius $\overrightarrow{R_0 R}$ yra statmenas plokštumai α. Jei $\vec{r} = \overrightarrow{OR} = (x, y, z)$, gauname plokštumos α **vektorinę lygtį**:

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = 0.$$

Perrašome šią lygtį koordinatėmis:

$$(x - x_0)A + (y - y_0)B + (z - z_0)C = 0$$

arba

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0.$$

Tarkime, kad į visus reiškinius neįeina koordinatė z. Tada turime vektorius $\vec{r}$, $\vec{r}_0$, $\vec{n}$ plokštumoje ir lygtimi $Ax + By + \tilde{C} = 0$ išreiškiama tiesė, einanti per plokštumos tašką $R_0(x_0, y_0)$ statmenai vektoriui $\vec{n} = (A, B)$.

Tiesių ir plokštumų statmenumas

Dvi plokštumos (tiesės) α_1 ir α_2 yra statmenos, kai jų normalieji vektoriai $\vec{n}_1$ ir $\vec{n}_2$ yra statmeni. Kai plokštumos (tiesės) α_1 ir α_2 išreiškiamos lygtimis

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, &\quad (\alpha_1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, &\quad (\alpha_2) \end{aligned}$$

normalųjų vektorių $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ statmenumo sąlyga:

$$\boxed{(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0}$$

Plokštumos (tiesės) yra lygiagrečios, kai jų normalieji vektoriai yra kolinearūs: $\vec{n}_1 = \alpha\vec{n}_2$. Arba lygiagretumo sąlygos koordinatėmis:

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}$$

Pavyzdys
Raskime plokštumos, einančios per tašką $M(1,1,1)$ lygiagrečiai plokštumai Oyz, lygtį.
Sprendimas. Plokštumos Oyz normalusis vektorius yra $\vec{i} = (1,0,0)$. Taigi $A = 1$, $B = C = 0$ ir ieškomos plokštumos lygtis yra $x + D = 0$. Kai $D = -1$ plokštuma eina per tašką M.

Tiesės erdvėje lygtys

Tiesė erdvėje gali būti apibrėžta kaip dviejų plokštumų susikirtimas:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Tiesė apibrėžta, kai šios dvi plokštumos nėra lygiagrečios. Tai reiškia, kad

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2.$$

Ši lygybė galioja tada ir tik tada, kai bent vienas iš trijų determinantų nelygus nuliui

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

Tarkime, kad į šią sistemą neįeina kintamasis z. Tada sistemos sprendinys yra tiesių susikirtimo taškas. Šis taškas yra vienintelis, kai pirmasis determinantas nelygus nuliui.

1.6.4 Tiesių ir plokštumų pagrindinai uždaviniai

Tiesės, einančios per du taškus, lygtis

Tarkime, kad tiesė eina per du erdvės taškus $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Tada bet kuriam tiesės taškui $M(x, y, z)$ turime

$\overrightarrow{M_1M} \,||\, \overrightarrow{M_1M_2}$. Arba

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Plokštumos, einančios per tris taškus, lygtis

Tarkime, kad plokštuma eina per tris taškus $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, kurie nepriklauso vienai tiesei. Tada, esant bet kuriam plokštumos taškui $M(x, y, z)$, vektoriai $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ ir $\overrightarrow{M_1M_3}$ yra komplanarūs. Taigi $\left(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right) = 0$. Arba koordinatėmis:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Pastebėkime, kad jei vektoriai $\overrightarrow{M_1M_2}$ ir $\overrightarrow{M_1M_3}$ yra kolinearūs, šis determinantas tapačiai lygus nuliui.

Tiesės ir plokštumos lygiagretumo sąlygos

Tiesė $\vec{r}-\vec{r}_0 = t\vec{a}$ yra lygiagreti plokštumai (arba yra šioje plokštumoje) $Ax + By + Cz + D = 0$, kai vektorius $\vec{a}$ yra statmenas plokštumos normaliajam vektoriui $\vec{n} = (A, B, C)$. Arba

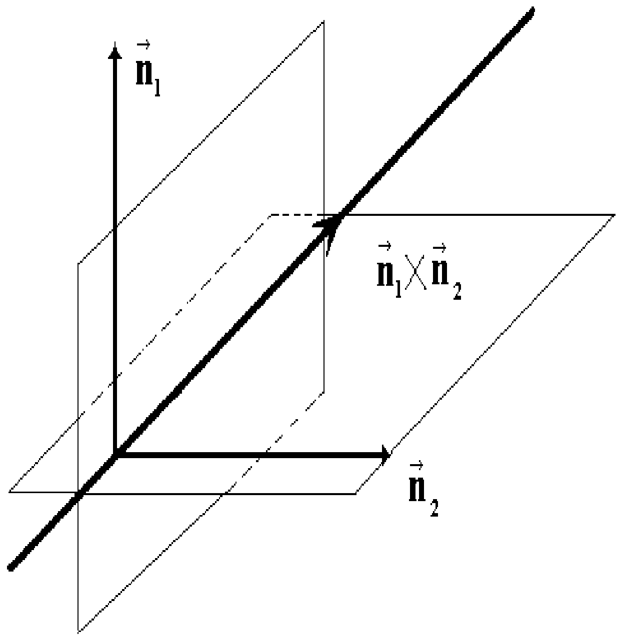
$$(\vec{a}, \vec{n}) = 0.$$

Tarkime, kad tiesė apibrėžta tiesinėmis lygtimis

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Tada vektorių $\vec{a}$ galima rasti kaip šių plokštumų normaliųjų vektorių $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ ir $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ vektorinę sandaugą

$$\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$



12 pav. Tiesės ir plokštumų lygiagretumas

Todėl tiesės ir plokštumos lygiagretumo sąlygą galima užrašyti taip:

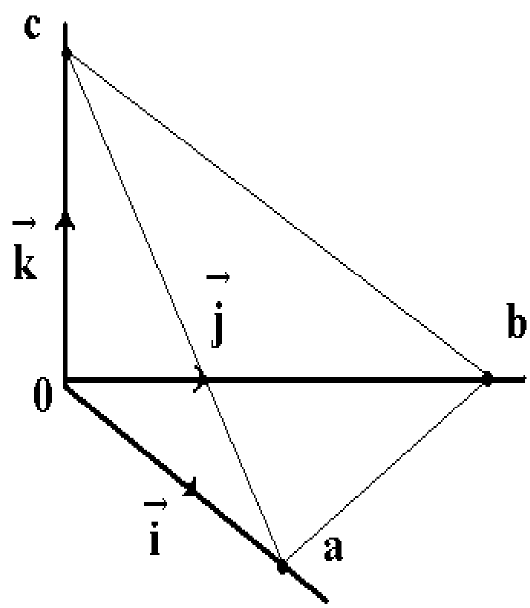
$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Lygtys atkarpomis

Plokštumos atkarpomis lygtis

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Skaičių a, b, c geometrinė prasmė parodyta 13 pav.



13 pav. Plokštumos apibrėžimas atkarpomis

Tiesės lygtis atkarpomis

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Taško atstumas nuo plokštumos

Tarkime, kad plokštumos lygtis yra

$$(\vec{r}-\vec{r}_0, \vec{p}, \vec{q}) = 0, \ \vec{r} = (x, y, z), \ \vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

Raskime taško $M_1(x_1, y_1, z_1)$ atstumą nuo šios plokštumos. Plokštuma eina per tašką $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ($\overrightarrow{OM_0} = \vec{r}_0$). Gretasienio, sudaromo vektoriais $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$ tūris lygus $V = \left|\left(\overrightarrow{M_0M}, \vec{p}, \vec{q}\right)\right|$. Taško M_0 atstumas h nuo plokštumos yra šito gretasienio aukštinė. Kadangi $V = Sh$, turime $h = \dfrac{V}{S}$. Čia $S = |\vec{p} \times \vec{q}|$ – gretasienio pagrindo plotas. Taigi

$$h = \frac{|(\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{p}, \vec{q})|}{|\vec{p} \times \vec{q}|}.$$

Vektorių $\vec{p}$, $\vec{q}$ vektorinę sandaugą galima pakeisti plokštumos **normaliuoju** vektoriumi $\vec{n} = (A, B, C)$. Tada

$$h = \frac{|(\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{n})|}{|\vec{n}|}.$$

Pažymėję $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, (tai reiškia, kad taškas M_0 prikauso plokštumai $Ax + By + Cz + D = 0$) gauname $(\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{n}) = (x_1 - x_0)A + (y_1 - y_0)B + (z_1 - z_0)C = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$. Taigi taško $M_1(x_1, y_1, z_1)$ atstumas nuo plokštumos $Ax + By + Cz + D = 0$ lygus

$$h = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Taško atstumas nuo tiesės

Plokštumos taško $M_1(x_1, y_1)$ atstumas nuo tiesės $Ax + By + C = 0$ lygus

$$h = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Atstumas tarp nelygiagrečių tiesių erdvėje

Tiesių einančių per taškus $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ir $M_2(x_2, y_2, z_2)$ lygiagrečiai vektoriams $\vec{a}_1 = (a_{1x}, a_{1y}, a_{1z})$ ir $\vec{a}_2 = (a_{2x}, a_{2y}, a_{2z})$ lygtys yra

$$\vec{r} - \vec{r}_1 = t\vec{a}_1,\ \vec{r} - \vec{r}_2 = t\vec{a}_2,\ \vec{r} = (x, y, z),\ t \in R.$$

Atstumas tarp šių tiesių

$$h = \frac{|(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{a}_1, \vec{a}_2)|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}.$$

Skyrius 2

Laboratoriniai darbai

2.1 Pirmasis laboratorinis darbas Algebrinės operacijos MAPLE terpėje

Sumos, atimties, sandaugos, dalybos operacijoms žymėti naudojame simbolius $+$, **-**, *****, / , o kėlimą laipsniu žymime simboliu `^`.

```
> (z+a*y-x)^3;
```

$$(z + a\,y - x)^3$$

Simboliui **r** suteikiame reiškinio reikšmę naudodami priskyrimo ženklą **:=**. Jei komandą užbaigsime simboliu **:** (o ne **;**), ji bus įvykdyta, o rezultatas nebus spausdinamas ekrane:

```
> r:=(z+a*y-x)^3:
```

Priskirtąjį simboliui reiškinį galime atspausdinti ekrane naudodami komandą **print**:

```
> print(r);
```

$$(z + a\,y - x)^3$$

Algebrinį reiškinį $r := (z + a\,y - x)^3$ išskleisime naudodami komandą **expand:**

```
> r1:=expand(r);
```

$$r1 := z^3 + 3\,z^2\,a\,y - 3\,z^2\,x + 3\,z\,a^2\,y^2 - 6\,z\,a\,y\,x + 3\,z\,x^2 + \\ +a^3\,y^3 - 3\,a^2\; - y^2\,x + 3\,a\,y\,x^2 - x^3$$

o norimu būdu surūšiuosime komanda **sort** :

```
> sort(r1);
```

$$y^3\,a^3 - 3\,x\,y^2\,a^2 + 3\,y^2\,a^2\,z + 3\,x^2\,y\,a - 6\,x\,y\,a\,z + \\ +3\,y\,a\,z^2 - x^3 + 3\,x^2\,z - 3\,x\,z^2 + z^3$$

Simboliu **%** žymimas paskutinis skaičiavimų rezultatas. Jei norime surūšiuoti reiškinį pagal kintamojo **x** laipsnius, rašome tokią komandą:

```
> sort(%,[x]);
```

$$-x^3 + 3\,y\,a\,x^2 + 3\,z\,x^2 - 6\,y\,a\,z\,x - 3\,y^2\,a^2\,x - \\ -3\,z^2\,x + 3\,y\,a\,z^2 + 3\,y^2\,a^2\,z + y^3\,a^3 + z^3$$

Nurodę papildomą rūšiavimo tvarką, gausime kitokį rezultatą:

```
> sort(%,[x,y]);
```

$$-x^3 + 3\,a\,x^2\,y - 3\,a^2\,x\,y^2 + a^3\,y^3 + \\ +3\,z\,x^2 - 6\,a\,z\,x\,y + 3\,a^2\,z\,y^2 - 3\,z^2\,x + 3\,a\,z^2\,y + z^3$$

Kartais patogu skaičiavimo rezultatus pakomentuoti arba tiesiog įvardinti. Tai galime padaryti tarp pasvirųjų kabučių **'... '**:

```
> 'skleidinys pagal x,y,z'=sort(%,[x,y,z]);
```

$$\mathit{skleidinys\ pagal}\ x, y, z = -x^3 + 3\,a\,x^2\,y + \\ +3\,x^2\,z - 3\,a^2\,x\,y^2 - 6\,a\,x\,y\,z - 3\,x\,z^2 + a^3\,y^3 \\ +\,3\,a^2\,y^2\,z + 3\,a\,y\,z^2 + z^3$$

Šį reiškinį sugrupuosime pagal kintamųjų laipsnius naudodami funkciją **collect**:

```
> collect(r,x);
```

$$-x^3+(3\,z+3\,a\,y)\,x^2+((z+a\,y)\,(-2\,z-2\,a\,y)-$$
$$-(z+a\,y)^2)\,x+(z+a\,y)^3$$

Komandą **factor** naudojame reiškiniui išskaidyti dauginamaisiais:

```
> factor(%);
```

$$-(x-z-a\,y)^3$$

Jei norime apskaičiuoti algebrinio reiškinio reikšmę, atitinkančią konkrečias jo argumentų arba parametrų reikšmes, naudojame operatorių **subs:**

```
> subs(x=2,a=1,r);
```

$$(z+y-2)^3$$

Kai norime skaičiavimus tiesiog pakomentuoti, galime įrašyti komentarą komandinėje eilutėje, atskirdami jį ženklu #:

```
> a:=2:x:=1:y:=3:z:=5:r;#r reikšmė taške (1,3,5),a=2
```

$$1000$$

Pastebėkime, kad, naudojant komandą **subs**, kintamieji **a, x, y, z** liko laisvi, o dabar, naudojant priskyrimo ženklą :=, kintamiesiems negrįžtamai buvo priskirtos skaitinės reikšmės:

```
> print(r1);
```

$$1000$$

Norėdami atlaisvinti kintamųjų reikšmes, naudojame komandą **restart**. Turėkime omenyje, kad ji panaikina visus ankstesnių skaičiavimų rezultatus.

```
> restart:
```

Reiškinio algebrinę išraišką galime pakeisti komanda **convert**. Keičiame dešimtainį skaičių trupmena:

```
> convert( 3.14,fraction );
```

$$\frac{157}{50}$$

Racionalųjį reiškinį

```
> f:=(x)-> (x^5+x^2+2)/(x^2-1);
```

$$f := x \to \frac{x^5+x^2+2}{x^2-1}$$

galime išreikšti sveikosios dalies (daugianario) ir taisyklingųjų racionaliųjų reiškinių suma:

```
> convert(f(x), parfrac, x);
```

$$x^3+x+1-\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-1}$$

Bet kurios komandos aprašymą gausite darbiniame lange po klaustuko ženklo **?** surinkę komandos vardą ir paspaudę klavišą **enter**. Pavyzdžiui,

```
> ?convert;
```

Atkreipkime dėmesį, kad reiškinį užrašėme kaip funkciją **f(x)**, naudodami atimties ir nelygybės simbolius **-** ir $>$. Tokiu atveju jos reikšmę, tarkime, taške $x := \pi$, gausime taip:

```
> f(Pi);
```

$$\frac{\pi^5+\pi^2+2}{\pi^2-1}$$

Apytikslę dešimtainę reikšmę gausime komanda **evalf**:

```
> evalf(%);
```

$$35.84030075$$

Skaičiavimų tikslumą pakeisime nurodę norimą dešimtainių ženklų po kablelio skaičių:

```
> evalf(f(Pi),25);
```

$$35.84030074073290927925016$$

Apibrėžkime naują reiškinį:

```
> p:=(y^7-1)/(y-1);
```

$$p := \frac{y^7 - 1}{y - 1}$$

Komanda **simplify** suprastins reiškinį:

```
> s:=simplify(p);
```

$$s := y^6 + y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y + 1$$

Jį galime užrašyti kaip kintamojo **y** funkciją naudojant komandą **unapply:**

```
> g(y):=unapply(s,y);
```

$$\mathrm{g}(y) := y \to y^6 + y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y + 1$$

Tą patį reiškinį galime užrašyti naudodami komandą **sum**:

```
> sum(y^i, i=0..6);
```

$$y^6 + y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y + 1$$

Funkcija **product** analogiškai veikia sandaugos atžvilgiu:

```
> product(k^k/(k+1), k=0..6 );
```

$$\frac{5598720000}{7}$$

Panašiai veikia komandos **mul** ir **add**:

```
> mul( i^i/(i+1), i=0..6 );
> add( y^i, i=0..6 );
```

$$\frac{5598720000}{7}$$
$$y^6 + y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y + 1$$

Formulę

```
> (a-b)^2=a^2-2*a*b+b^2;
```

$$(a - b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2$$

galime patikrinti apskaičiavę jos kairiosios ir dešiniosios pusių skirtumą **lhs** ir **rhs** funkcijų pagalba:

```
> simplify(lhs(%)-rhs(%));
```

$$0$$

Užduotys

1. Išskaidykite dauginamaisiais reiškinį $x^6 - x^5 - 9\,x^4 + x^3 + 20\,x^2 + 12\,x$.

2. Patikrinkite Jums žinomų algebros formulių teisingumą.

3. Užrašykite reiškinį $n(n-1)..(n-k+1) = n!/(n-r)!$ kaip kintamųjų k ir n funkciją ir apskaičiuokite jo reikšmes esant įvairioms argumentų reikšmėms.

2.2 Antrasis laboratorinis darbas Matricos, determinantai, tiesinės lygčių sistemos. Determinantų skaičiavimas

Atvirkštinės matricos radimas. Tiesinių lygčių sistemų sprendimas. Bendrojo sprendinio tyrimas Maple terpėje

Matricos užrašymas MAPLE

MAPLE matricas galima užrašyti (užduoti, įvesti) keletu būdų. Apibūdinsime pagrindinius iš jų. Pirmiausia aktyvuojame **linalg** paketą:

```
> with(linalg):
```

Galime užrašyti matricą išvardindami visų jos eilučių elementus:

```
> A:=matrix( [ [1,2,3],[2,8,5],[3,0,10] ] );
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Galime išvardinti visus matricos elementus paeiliui, prieš tai nurodę matricos formatą:

```
> A:=matrix(3,3,[1,2,3,2,8,5,3,0,10]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Kartais naudinga apibrėžti matricos elementus kaip tų elementų indeksų funkcijas (prieš tai turime nurodyti matricos formatą):

```
> B:=matrix(3,3,(i,j)->(i+j)^j);
```

$$B := \begin{bmatrix} 2 & 9 & 64 \\ 3 & 16 & 125 \\ 4 & 25 & 216 \end{bmatrix}$$

Turimoje matricoje vieną jos elementą galime pakeisti taip:

```
> A[2,3]:=-8:  A=evalm(A);
```

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & -8 \\ 3 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Vienetinę matricą patogu apibrėžti **identity** komanda:

```
> E:=Matrix(4,4,shape=identity);
```

$$E := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matricas, kurių visi elementai vienodi, greitai užrašysime šitaip:

```
> A:=matrix(2,5,1);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matricą, kurios elementai yra atsitiktiniai skaičiai, galime generuoti **randmatrix** komanda:

```
> B:=randmatrix(2,5);
```

$$B := \begin{bmatrix} -7 & 22 & -55 & -94 & 87 \\ -56 & 0 & -62 & 97 & -73 \end{bmatrix}$$

Skliausteliuose nurodėme matricos formatą.

Matricų veiksmai

Matricų suma užrašoma taip pat kaip skaičių suma:

```
> C:=A+B;
```

$$C := A + B$$

Komanda **evalm** suskaičiuoja matricos elementų reikšmes (veikia panašiai kaip komanda **evalf**esant skaliariniams dydžiams:

```
> F:=evalm(%);
```

$$F := \begin{bmatrix} -6 & 23 & -54 & -93 & 88 \\ -55 & 1 & -61 & 98 & -72 \end{bmatrix}$$

Transponuotoji matrica randama naudojant komandą **transpose**:

```
> Btr:=transpose(B);
```

$$Btr := \begin{bmatrix} -7 & -56 \\ 22 & 0 \\ -55 & -62 \\ -94 & 97 \\ 87 & -73 \end{bmatrix}$$

Matricos rangą apskaičiuojame naudodami **rank** komandą:

```
> rank(B);
```

$$2$$

```
> rank(A);
```

$$1$$

Raskime atsitiktinės matricos trečiąjį laipsnį:

```
> A:=randmatrix(5,5);
```

$$A := \begin{bmatrix} -4 & -83 & -10 & 62 & -82 \\ 80 & -44 & 71 & -17 & -75 \\ -10 & -7 & -40 & 42 & -50 \\ 23 & 75 & -92 & 6 & 74 \\ 72 & 37 & -23 & 87 & 44 \end{bmatrix}$$

```
> `A^3`=evalm(A^3);
```

$$A\hat{\ }3 = \begin{bmatrix} 1030257 & 574379 & 1252419 & -505139 & 848510 \\ -1435013 & 1023781 & -342743 & -1606463 & 1368007 \\ 405365 & -193997 & 760807 & 51921 & -179986 \\ -104235 & -769193 & -753706 & 1144728 & -991853 \\ 313283 & -85120 & -466323 & 345223 & 165764 \end{bmatrix}$$

Naudojame tą patį kėlimo laipsniu simbolį ^kaip ir keldami laipsniu skaliarinius dydžius. Matricas dauginsime naudodami simbolį **&*** :

```
> G:=evalm(F&*A);
```

$$G := \begin{bmatrix} 6601 & -3855 & 10385 & 4067 & -1543 \\ -2020 & 9634 & -4299 & -11665 & 11569 \end{bmatrix}$$

arba komandą **multiply**:

```
> multiply(F, A);
```

$$\begin{bmatrix} 6601 & -3855 & 10385 & 4067 & -1543 \\ -2020 & 9634 & -4299 & -11665 & 11569 \end{bmatrix}$$

Komanda **multiply**leidžia užrašyti didesnį negu 2 dauginamųjų skaičių:

```
> multiply(F, A, transpose(G));
```

$$\begin{bmatrix} 185203789 & -160410727 \\ -160410727 & 385289743 \end{bmatrix}$$

Matricą dauginame iš skaičiaus naudodami įprastą daugybos simbolį *:

```
> `5*A`:=evalm(5*A);
```

$$5*A := \begin{bmatrix} -20 & -415 & -50 & 310 & -410 \\ 400 & -220 & 355 & -85 & -375 \\ -50 & -35 & -200 & 210 & -250 \\ 115 & 375 & -460 & 30 & 370 \\ 360 & 185 & -115 & 435 & 220 \end{bmatrix}$$

Kvadratinės matricos determinantą apskaičiuojame naudodami komandą **det**:

```
> `Matricos A determinantas`:=det(A);
```

$$\mathit{Matricos\ A\ determinantas} := 4224726702$$

Atvirkštinę matricą randame **inverse** komanda:

```
> `Aatv`:=inverse(A);
```

$$Aatv := \begin{bmatrix} \frac{418322}{100588731} & \frac{6016112}{704121117} & \frac{-1429159}{234707039} & \frac{857507}{100588731} & \frac{744608}{704121117} \\ \frac{-674143}{33529577} & \frac{174134}{234707039} & \frac{5417084}{234707039} & \frac{-276684}{33529577} & \frac{915420}{234707039} \\ \frac{-5413219}{603532386} & \frac{-3393248}{2112363351} & \frac{3143353}{1408242234} & \frac{-4100771}{301766193} & \frac{12542350}{2112363351} \\ \frac{-802249}{603532386} & \frac{-11184854}{2112363351} & \frac{7758601}{1408242234} & \frac{-2617391}{301766193} & \frac{19740775}{2112363351} \\ \frac{2426770}{301766193} & \frac{-10509755}{2112363351} & \frac{-13498831}{704121117} & \frac{916126}{301766193} & \frac{4948177}{2112363351} \end{bmatrix}$$

Nepamirškime, kad tik reguliarioji matrica (t. y. tokia, kurios determinantas nelygus nuliui) turi atvirkštinę matricą.
Patikrinsime, ar tikrai gautoji matrica **Aatv** yra matricos **A** atvirkštinė matrica:

```
> evalm(Aatv&*A);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vektoriai

Vektoriams užrašyti galime naudoti komandą **vector:**

```
> vector( [5,4,3,2] );
```

$$[5, 4, 3, 2]$$

Jei visos vektoriaus komponentės vienodos, galime nurodyti tik vektoriaus matavimą ir komponenčių vertę:

```
> vector(5, 7);
```

$$[7, 7, 7, 7, 7]$$

Pravartu mokėti vektoriaus komponentes užrašyti kaip komponenčių indeksų funkcijas:

```
> f := x -> 6-x:
v := vector(4, f);
```

$$v := [5, 4, 3, 2]$$

Šitokiu būdu ušrašėme pirmąjį iš čia nagrinėtųjų vektorių. Norimas esamo vektoriaus komponentes galime gauti taip:

```
> v[1],v[4];
```

$$5, 2$$

Tiesinių lygčių sistemos

Panagrinėkime keletą tiesinių lygčių sistemų sprendimo būdų. Tegul kaip pavyzdys būna sistema

$$5x + 8y - 3z = 21,$$

$$3x + 11y + 4z = 13,$$

$$x + 5y - 5z = 12$$

Sistemos matrica **A** yra:

```
> A:=matrix([ [5,8,-3],[3,11,4],[1,5,-5]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 5 & 8 & -3 \\ 3 & 11 & 4 \\ 1 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

Dešiniųjų lygčių pusių reikšmių vektorių pažymėkime **B:**

```
> B:=[21,13,12];
```

$$B := [21,\ 13,\ 12]$$

o nežinomų kintamųjų vektorių – **X:**

```
> X:=[x,y,z];
```

$$X := [x,\ y,\ z]$$

Sistemą užrašykime matriciniu pavidalu **AX=B**:

```
> evalm(A&*X)=B;
```

$$[5\,x + 8\,y - 3\,z,\ 3\,x + 11\,y + 4\,z,\ x + 5\,y - 5\,z] = [21,\ 13,\ 12]$$

Panagrinėkime tris tiesinių lygčių sistemų sprendimo būdus.

I būdas. Naudojame komandą **linsolve**, kuri sprendžia sistemą **AX=B:**

```
> X:=linsolve(A,B);
```

$$X := [2,\ 1,\ -1]$$

II būdas. Sistemą sprendžiame **atvirkštinės matricos metodu**, sprendinį gauname suskaičiavę sandaugą **X=A^(-1)&*B**:

```
> Atv:=inverse(A);
```

$$Atv := \begin{bmatrix} \frac{15}{47} & \frac{-5}{47} & \frac{-13}{47} \\ \frac{-19}{235} & \frac{22}{235} & \frac{29}{235} \\ \frac{-4}{235} & \frac{17}{235} & \frac{-31}{235} \end{bmatrix}$$

```
> X:=evalm(Atv &* B);
```

$$X := [2, 1, -1]$$

III būdas. Sistemą sprendžiame **Gauso ir Žordano metodu.** Naudodami komandą **augment**, sudarome išplėstąją sistemos matricą:

```
> AB:=augment(A,B);
```

$$AB := \begin{bmatrix} 5 & 8 & -3 & 21 \\ 3 & 11 & 4 & 13 \\ 1 & 5 & -5 & 12 \end{bmatrix}$$

Tada naudojame komandą **gaussjord:**

```
> G_J:=gaussjord(AB);
```

$$G\_J := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Mūsų sistemos sprendinio **X** komponentes matome paskutiniame šios matricos stulpelyje. Akivaizdumo dėlei, **stackmatrix** komanda šią matricą papildome nežinomųjų eilute:

```
> GJ:=stackmatrix([[x,y,z,b]],G_J);
```

$$GJ := \begin{bmatrix} x & y & z & b \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Raidėmis **x, y, z** pažymėti atitinkamų nežinomųjų koeficientų stulpeliai. Dabar akivaizdu, kad sistema, ekvivalenti pradinei, yra tokia:

$$\mathbf{x} = \mathbf{2}, \;\; \mathbf{y} = \mathbf{1}, \;\; \mathbf{z} = -\mathbf{1},$$

(jos matrica yra **GJ).**

Kitas pavyzdys:

```
> with(linalg):
> A:=matrix( [ [1,-1,1,1],[2,-1,-1,1],[1,-2,4,2] ] );
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> B:=[2,3,1];
```

$$B := [2, 3, 1]$$

```
> AB:=augment(A,B);
```

$$AB := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> G_J:=gaussjord(AB);
```

$$G\_J := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Paskutinioji šios matricos eilutė atitinka lygtį

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 1.$$

Ši lygybė negalima, taigi sistema **sprendinių neturi.**

Dar vienas uždavinys: raskite **visus** lygčių sistemos

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 2,$$

$$3x_1 - 2x_2 - 5x_4 - x_5 = -2,$$
$$-2x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 3$$

sprendinius. Sistemos matricą pažymėkime S:

```
> S:=matrix( [ [1,2,1,2,-1],[3,-2,0,-5,-1],
[-2,3,1,-4,0] ] );
```

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & -5 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> B:=[2,-2,3];
```

$$B := [2,\ -2,\ 3]$$

```
> X:= linsolve(S,B);
```

$$X := [\_t_2,\ 1 - 11\ \_t_1,\ 2\ \_t_2 + 37\ \_t_1,\ \_t_1,\ 3\ \_t_2 + 17\ \_t_1]$$

čia t_1, t_2 – bet kokie realieji skaičiai. Patikrinkime, ar gautasis vektorius **X** tenkina sistemą:

```
> Patikrinimas:= evalm (S &* X)= B;
```

$$Patikrinimas := [2,\ -2,\ 3] = [2,\ -2,\ 3].$$

Kaip matome, **X** tikrai yra šios sistemos sprendinys. Jį vadiname **bendruoju sistemos sprendiniu**.

Uždaviniai

1. Apskaičiuokite matricos $A := \begin{bmatrix} -5 & -7 & 6 & 1 \\ 4 & -3 & 2 & 2 \\ 6 & 6 & -4 & -6 \\ 4 & 5 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ determinantą. Raskite atvirkštinę matricą. Patikrinkite rezultatą sudauginę **A** ir rastąją matricą.

2. Tegu duota matrica $A := \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \\ -1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ ir vektorius $B := [-13,\ 8,\ 19]$. Įvairiais būdais išspręskite lygčių sistemą

AX = B. Naudokite komandas **linsolve, gaussjord**, o tuo atveju, jei sistema turi vienintelį sprendinį, raskite jį ir atvirkštinės matricos metodu bei naudodami Kramerio taisykles. Jei sistema turi vienintelį sprendinį, pakeiskite ją taip (keisdami jos koeficientus ar kitaip), kad ji turėtų be galo daug sprendinių.

2.3 Trečiasis laboratorinis darbas Kompleksiniai skaičiai ir daugianariai. Kompleksinių skaičių veiksmai

Daugianarių šaknų radimas

Kompleksinį skaičių algebrine forma $z = x + iy$, kai x yra realioji, y – menamoji skaičiaus z dalis, o i – menamasis vienetas, turintis savybę $i^2 = 1$, MAPLE galime užrašyti komanda **Complex:**

```
> z:=Complex(2,5);
```

$$z := 2 + 5\,I$$

Taip pat galime jį užrašyti kaip algebrinį reiškinį, naudodami raidę **I** menamajam vienetui i žymėti:

```
> z := 2 + 5*I;
```

$$z := 2 + 5\,I$$

Realiąją kompleksinio skaičiaus dalį gausime naudodami komandą **Re(z),** o menamąją - **Im(z):**

```
> Rez :=Re(z);
```

$$Rez := 2$$

```
> Imz :=Im(z]);
```

$$Imz := 5$$

Kompleksinio skaičiaus $x + y\,I$ jungtinis skaičius $x - I\,y$ randamas komanda **conjugate**:

```
> `jungtinisz` = conjugate(z);
```

$$jungtinisz = 2 - 5I$$

Veiksmai, atliekami su kompleksiniais skaičiais

Kompleksinių skaičių sumos, atimties, daugybos, dalybos veiksmams užrašyti MAPLE naudojami įprasti simboliai $+$, **-**, *****, /:

```
> z[1]:= 3 + 7*I;
> z[2]:= 5 - 6*I;
> `z[1] + z[2]` = z[1] + z[2];
> `z[1] - z[2]` = z[1] - z[2];
```

$$z_1 := 3 + 7\,I$$

$$z_2 := 5 - 6\,I$$

$$z[1]\ +\ z[2] = 8 + I$$

$$z[1]\ -\ z[2] = -2 + 13\,I$$

```
> `z[1]*z[2]` = Z[1]*Z[2];
```

$$z[1] * z[2] = Z_1\,Z_2$$

```
> `z[1]/z[2]`=Z[1]/Z[2];
```

$$z[1]/z[2] = \frac{Z_1}{Z_2}$$

Kompleksinių reiškinių reikšmės apskaičiuojamos komanda **evalc**:

```
> z:=(sqrt(5)+3*I)^2;
```

$$z := (\sqrt{5} + 3\,I)^2$$

```
> evalc(z);
```

$$-4 + 6\,I\,\sqrt{5}$$

Kompleksinio skaičiaus modulį rasime naudodami komandą **abs** :

```
> `z`=sqrt(2+5*I);
```

$$(\sqrt{5} + 3\,I)^2 = \sqrt{2 + 5\,I}$$

```
> evalc(z);
```

$$-4+6\,I\,\sqrt{5}$$

```
> ‘modz‘=abs(z);
```

$$modz = 14$$

Bet kuriems kompleksiniams skaičiams $z_1,\ z_2$ galioja **trikampio nelygybė**

$$|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|,$$

kurią galima apibendrinti esant bet kokiam baigtiniam dėmenų skaičiui n:

$$|\sum_{i=1}^{n} z_i| \le \sum_{i=1}^{n} |z_i|.$$

Patikrinkime ją, kai turime tris dėmenis:

```
> z1:= 7 +I;
> z2:= 3 +5*I;
> z3:=-2 -7*I;
> ‘z1 + z2 +z3 ‘= z1 + z2 + z3;
> ‘|z1| ‘ = abs(z1);
> ‘|z2| ‘ = abs(z2);
> ‘|z3| ‘ = abs(z3);
> ‘|z1 + z2 + z3| ‘ = abs(z1 + z2 +z3); ‘ ‘;
> evalf(abs(z1 + z2 +z3) <= abs(z1) + abs(z2) + abs(z3));
```

$$z1 := 7+I$$

$$z2 := 3+5\,I$$

$$z3 := -2-7\,I$$

$$z1\ +\ z2\ +z3\ = 8-I$$

$$|z1|\ = 5\,\sqrt{2}$$

$$|z2|\ = \sqrt{34}$$

$$|z3|\ = \sqrt{53}$$

$$|z1\ +\ z2\ +\ z3|\ = \sqrt{65}$$

$$8.062257748 \le 20.18212959$$

Trigonometrinė (polinė) kompleksinių skaičių forma

Prisiminkime, kad kompleksinio skaičiaus z **trigonometriniu pavidalu** vadiname skaičiaus z algebrinę išraišką, gaunamą kompleksinėje plokštumoje naudojant **polines koordinates**:

$$z = r(cos\theta + isin\theta).$$

Čia $r = |z|$ - kompleksinio skaičiaus **modulis**, o polinis kampas θ vadinamas skaičiaus **argumentu**. Skaičiaus $z := -1 - I$ polinį pavidalą MAPLE galime užrašyti taip:

```
> z := -1 - I;
```

$$z := -1 - I$$

```
> `polz`:=abs(z)*(cos(theta)+I*sin(theta));
```

$$polz := \sqrt{2}\,(\cos(\theta) + \sin(\theta)\,I)$$

Skaičiaus argumentą galime gauti komanda **argument:**

```
> `theta`:=argument(z);
```

$$\theta := -\frac{3\,\pi}{4}$$

Naudodami funkciją **polar** gausime kompleksinio skaičiaus polinę formą tokiu pavidalu:

```
> `polarz`:=polar(z);
```

$$polarz := \mathrm{polar}(\sqrt{2}, -\frac{3\,\pi}{4})$$

Žinome, kad dauginant (dalinant) kompleksinius skaičius jų moduliai dauginami (dalinami), o argumentai sudedami (atimami). Sudauginkime ir padalinkime du kompleksinius skaičius poline forma:

```
> z1:=1+2*I;
```

$$z1 := 1 + 2\,I$$

```
> polar(z1);
```

$$\mathrm{polar}(\sqrt{5},\, \arctan(2))$$

```
> `polar(z*z1)`:=polar(sqrt(2),-3/4*Pi)*polar(sqrt(5),
arctan(2));
```

$$\mathit{polar}(z * \mathit{z1}) := \mathrm{polar}(\sqrt{2},\, -\frac{3\,\pi}{4})\,\mathrm{polar}(\sqrt{5},\, \arctan(2))$$

```
> simplify(%);
```

$$\mathrm{polar}(\sqrt{2}\,\sqrt{5},\, -\frac{3\,\pi}{4} + \arctan(2))$$

```
> `polar(z/z1)`:=polar(sqrt(2),-3/4*Pi)/polar(sqrt(5),
arctan(2));
```

$$\mathit{polar}(z/\mathit{z1}) := \frac{\mathrm{polar}(\sqrt{2},\, -\frac{3\,\pi}{4})}{\mathrm{polar}(\sqrt{5},\, \arctan(2))}$$

```
> simplify(%);
```

$$\mathrm{polar}(\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{5}}{5},\, -\frac{3\,\pi}{4} - \arctan(2))$$

Rodiklinė (eksponentinė) kompleksinio skaičiaus forma

Rodikliniu kompleksinio skaičiaus **pavidalu** vadiname algebrinę išraišką

$$z = re^{i\theta} = r(cos\theta + isin\theta).$$

Skaičių z = 1+4i užrašykime rodikline forma:

```
> z:=1+4*I;
```

$$z := 1 + 4\,I$$

```
> theta:=argument(z);
```

$$\theta := \arctan(4)$$

```
> r:=abs(z);
```

$$r := \sqrt{17}$$

```
> rodz:=r*exp(I*theta);
```

$$rodz := 1 + 4\,I$$

Funkcija **evalb** patikriname gautosios išraiškos teisingumą:

```
> evalb(rodz=z);
```

$$true$$

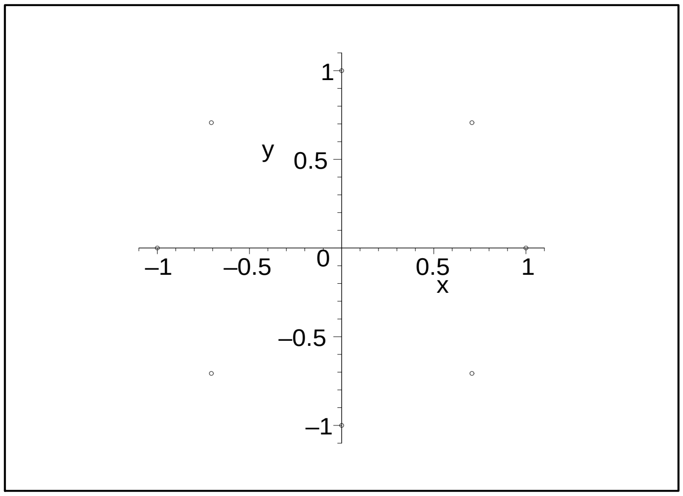
Daugianarių šaknų radimas

Suraskime visas lygties $z^3 = 1$ šaknis ir pavaizduokime jas grafiškai kompleksinėje plokštumoje. Naudosime komandą **map**, atliekančią atitinkamą procedūrą kiekvienam nurodytos aibės elementui, grafinę funkciją **plot**, komandą **solve**, randančią algebrinės lygties sprendinius (įrėminę komandos eilutę figūriniuose skliaustuose, gauname visą tokių sprendinių aibę):

```
> sprendinių_aibė :=solve(z^8=1,z):
> ‘Sprendiniai ‘ = sprendinių_aibė;
> taskai := map(w->[Re(w),Im(w)], sprendinių_aibė):
> plot(taskai, style=point, symbol=circle, scaling=constrained,
color=red,labels=[‘x‘,‘y ‘],view=[-1.1..1.1,-1.1..1.1]);
```

z^8 = 1 sprendiniai

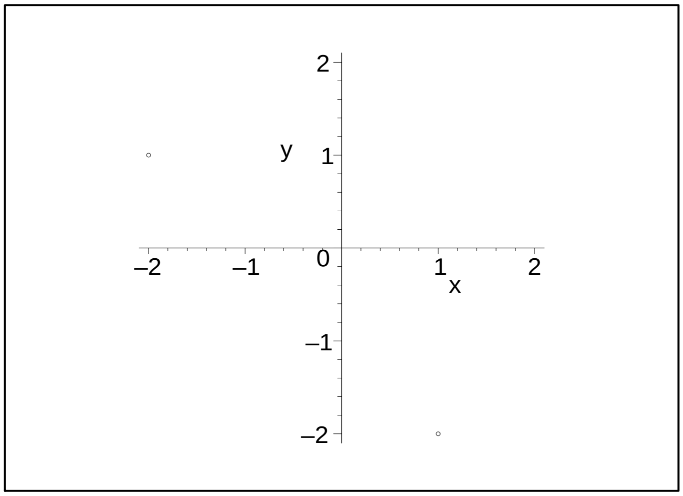
$$Sprendiniai\ = \{-1,\, 1,\, I,\, -I,\, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\,I\,\sqrt{2},\, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\,I\,\sqrt{2},\, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\,I\,\sqrt{2},\, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\,I\,\sqrt{2}\}$$



Išspręskime lygtį $z^2 + (1 + i)\, z + 5\, i = 0$:

```
> spr_aibe := {solve(z^2 +(1+I)*z +5*I,z)}:
> ‘Sprendiniai ‘ = spr_aibe; tsk := map(w->[Re(w),Im(w)],
spr_aibe):
> plot(tsk, style=point, symbol=circle, scaling=constrained,
color=red,labels=[‘ x‘,‘y‘],view=[-2.1..2.1,-2.1..2.1]);
```

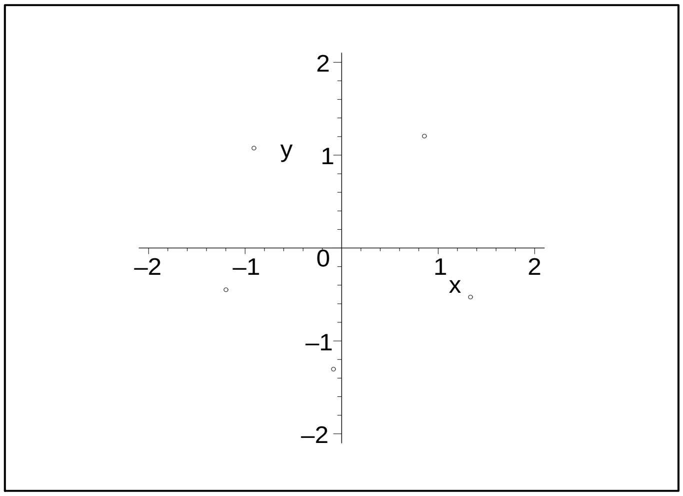
$$Sprendiniai\ = \{1 - 2\, I,\, -2 + I\}$$



Jei sprendinius gauname **RootOff** pavidalu, jų apytiksles reikšmes sužinosime naudodami komandą **evalf**:

```
>  s_aib := {solve(z^5 +(1+I)*z +5*I, z)}:
>  ‘Sprendiniai‘ = s_aib; tsk := map(w->[Re(w),Im(w)],
s_aib):
>  plot(tsk, style=point, symbol=circle, scaling=constrained,
color=red, labels=[‘ x‘,‘y ‘], view=[-2.1..2.1,-2.1..2.1]);
```

$$\mathit{Sprendiniai} = \{\mathrm{RootOf}(5\,I + \_Z^5 + (1+I)\,\_Z,\ \mathit{index} = 3),$$
$$\mathrm{RootOf}(5\,I + \_Z^5 + (1+I)\,\_Z,\ \mathit{index} = 1),$$
$$\mathrm{RootOf}(5\,I + \_Z^5 + (1+I)\,\_Z,\ \mathit{index} = 4),$$
$$\mathrm{RootOf}(5\,I + \_Z^5 + (1+I)\,\_Z,\ \mathit{index} = 5),$$
$$\mathrm{RootOf}(5\,I + \_Z^5 + (1+I)\,\_Z,\ \mathit{index} = 2)\},$$




```
> evalf(s_aib);
```

$$\{1.335251055 - 0.5274925690\,I,\ -0.9088695074 + 1.075425295\,I,\ -1.198729690 - 0.4487126974\,I,\ 0.8573804305 + 1.204816220\,I,\ -0.08503228805 - 1.304036249\,I\}$$

Kompleksinių skaičių matricinė interpretacija

```
> with(linalg) :
```

Vienetą algebrinėje kompleksinio skaičiaus išraiškoje keičiame **vienetine matrica E**,

```
> E:=Matrix(2,2,shape=identity);
```

$$E := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

o menamąjį vienetą - toliau apibrėžiama **matrica M**:

```
> M:=matrix(2,2,[ 0,-1,1,0]);
```

$$M := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Raskime sandaugą

```
> multiply(M,M);
```

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Taigi, matrica **M** turi menamojo vieneto **i** pagrindinę savybę. Pastoviąsias 2×2 matricas galime tapatinti su vektorių erdvės R^2 tiesiniais atvaizdavimais, gaunamais dauginant matricas ir erdvės vektorius:

```
> V:=vector([u,v]);
```

$$V := [u,\, v]$$

```
> multiply(E,V);
```

$$[u,\, v]$$

```
> W:=multiply(M,V);
```

$$W := [-v,\, u]$$

Matome, kad, daugindami vektorių **V** iš matricos **E** , gauname tą patį vektorių, t.y. vektorių erdvės atvaizdavimas **E** yra **tapatumo** atvaizdavimas, nes nekeičia erdvės. Tuo tarpu atvaizdavimas **M** kiekvieną vektorių pasuka 90 laipsnių kampu prieš laikrodžio rodyklę. Kampą tarp vektorių galime išmatuoti naudodami funkciją **angle**:

```
> angle(V,W);
```

$$\frac{\pi}{2}$$

Uždaviniai

1. Raskite kompleksinio skaičiaus $(1-2i)^{3/(5+i)}$ algebrinę, polinę ir rodiklinę formas, realiąją ir menamąją dalis, jo jungtinį kompleksinį skaičių.

2. Raskite visus lygties $z^3 - 3\,z + 3 = 0$ sprendinius ir pavaizduokite juos grafiškai kompleksinėje plokštumoje.

2.4 Ketvirtasis laboratorinis darbas Vektorių veiksmai. Vektorių skaliarinė, vektorinė ir mišrioji sandaugos

Vektorių užrašymas MAPLE

Vektorius MAPLE galime užrašyti keletu būdų. Mes dažniausiai naudosime paketą **linalg**. Gafiškai vektorius vaizduosime pasitelkdami paketą **Student[LinearAlgebra]** , kurį aktyvuojame komanda **with(Student[Linear Algebra]**:

```
> with(linalg):
> with(Student[LinearAlgebra]):
```

1. Vektoriai apibrėžiami išvardijant visas jų komponentes:

```
> V:=vector ( [ 1,2,3,4,5 ] );
```

$$V := [1, 2, 3, 4, 5]$$

2. Jei vektoriaus komponentes vienodos, paprasta jį užrašyti taip:

```
> V:=vector( 4,2 );
```

$$V := [2, 2, 2, 2]$$

Skaičius 4 lygus vektoriaus komponenčių skaičiui, o 2 – jų skaitinei vertei.

3. Vektorių užrašymas naudojant baigtinių aibių ir baigtinių sekų elementus.

Užrašykime sekos $S_n = 7 + (-1)^n 3n$ dešimt pirmųjų narių. Naudojame komandą **seq**:

```
> S:=seq(7+3*(-1)^n*n,n=1..10);
```

$$S := 4, 13, -2, 19, -8, 25, -14, 31, -20, 37$$

Norėdami šį skaičių rinkinį MAPLE traktuoti kaip aibę A, jį įterpiame tarp skliaustų {} ir pažymime raide A:

```
> A:={S};
```

$$A := \{-20, -14, -8, -2, 4, 13, 19, 25, 31, 37\}$$

Komanda A[ ] aibę A vėl pavaizduoja kaip seką:

```
> S:=A[];
```

$$S := -20, -14, -8, -2, 4, 13, 19, 25, 31, 37$$

Įterpdami S tarp laužtinių skliaustų, sekos S elementus paversime vektoriaus komponentėmis :

```
> V:=[S];
```

$$V := [-20, -14, -8, -2, 4, 13, 19, 25, 31, 37]$$

Analogiškai vektoriaus komponentės vėl paverčiamos sekos elementais:

```
> V[ ];
```

$$-20, -14, -8, -2, 4, 13, 19, 25, 31, 37$$

4. Jei vektoriaus komponentės yra susietos su savo indeksais funkcine priklausomybe
(pavyzdžiui, $v_n = n^2$), vektorių galime užrašyti tos funkcijos pagalba:

```
> V:=vector ( 7,x->x^2);
```

$$V := [1, 4, 9, 16, 25, 36, 49]$$

Šio vektoriaus komponentės lygios funkcijos reikšmėms atitinkamai taškuose 1,2,3,4,5,6,7 (pradinė argumento reikšmė lygi vienetui). Jei skaičiavimams reikalingos žinomo vektoriaus V komponentės, jos gaunamos šitaip:

```
> V[2];
```

$$4$$

Pavyzdžiui, sudėkime 2-ąją ir 4-ąją vektoriaus komponentes:

```
> suma:=V[2]+V[4];
```

$$Test := 20$$

Pademonstravome tik keletą iš daugelio galimų vektorių užrašymo MAPLE būdų.

Pagrindinės vektorių operacijos MAPLE

1. Vektoriaus komponenčių kiekį (vektoriaus matavimą) nurodo funkcija **vectdim**:

```
> V:=vector ( 7,x->x^2);
```

$$V := [1, 4, 9, 16, 25, 36, 49]$$

```
> mat:=vectdim(V);
```

$$mat := 7$$

2. Rūšiuoti vektoriaus komponentes galime naudodami komandą **sort**. Tarkime, kad turime seką **S**:

```
> S:=seq(7+3*(-1)^n*n,n=1..10);
```

$$S := 4,\ 13,\ -2,\ 19,\ -8,\ 25,\ -14,\ 31,\ -20,\ 37$$

Iš jos elementų sudarome vektorių:

```
> V:=[S];
```

$$V := [4,\ 13,\ -2,\ 19,\ -8,\ 25,\ -14,\ 31,\ -20,\ 37]$$

Komanda **sort** šio vektoriaus komponentes išdėstę didėjančia seka, gausime kitą vektorių:

```
> Sur:=sort(V);
```

$$Sur := [-20,\ -14,\ -8,\ -2,\ 4,\ 13,\ 19,\ 25,\ 31,\ 37]$$

Norėdami vektoriaus komponentes išdėstyti mažėjančia tvarka, naudojame komandą **sort(V,'>')**:

```
> Sur_maz_komp:=sort(V,'>');
```

$Sur\_maz\_komp := [37, 31, 25, 19, 13, 4, -2, -8, -14, -20]$

3. Didžiausias ir mažiausias vektoriaus komponentes randame taip:

```
> Maziausia:=min(V[]);
```

$$Maziausia := -20$$

```
> Didziausia:=max(V[]);
```

$$Didziausia := 37$$

4. Pakeisti vektoriaus komponentę galime nurodydami naują jos reikšmę. Pavyzdžiui, keičiame vektoriaus V:

```
> V;
```

$$[4, 13, -2, 19, -8, 25, -14, 31, -20, 37]$$

trečiąją komponentę:

```
> V[3]:=111;
```

$$V_3 := 111$$

Dabar vektorius **V** yra toks:

```
> V;
```

$$[4, 13, 111, 19, -8, 25, -14, 31, -20, 37]$$

Pakeisime vektoriaus komponentes dabartinių komponenčių reikšmių kvadratais, naudodami **map** komandą:

```
> 'V'=V;
```

$$V = [4, 13, 111, 19, -8, 25, -14, 31, -20, 37]$$

```
> W:=map(x->x^2,V);
```

$$\mathrm{W} := [16, 169, 12321, 361, 64, 625, 196, 961, 400, 1369]$$

Kartais praverčia sumos operatorius **add** ir sandaugos operatorius **mul**. Naudojant šiuos operatorius, galima sudėti arba sudauginti sekos narius, aibės elementus arba vektoriaus komponentes.

```
> Suma:=add(V[i],i=1..vectdim(V));
```

$$Suma := 198$$

```
> Sandauga:=mul(V[i],i=1..vectdim(V));
```

$$Sandauga := -7044194976000$$

5. Vektorių suma apskaičiuojama naudojant įprastą sumos ženklą + (žinoma, sudedami vektoriai turi būti vienmačiai):

```
> Suma:=V+W;
```

$$Suma := [20, 182, 12432, 380, 56, 650, 182, 992, 380, 1406]$$

6. Vektorius pavaizduoti grafiškai
galime subpaketu **Student[LinearAlgebra]**. Nepamirškime, kad vektoriai turi būti tinkamo matavimo (gali turėti tik 2 arba 3 komponentes). Taip pat turėkime omenyje, kad **Student[LinearAlgebra]** vektoriai užrašomi stulpelių pavidalu naudojant komandą **Vector** (**vector** yra paketo **linalg** komanda):

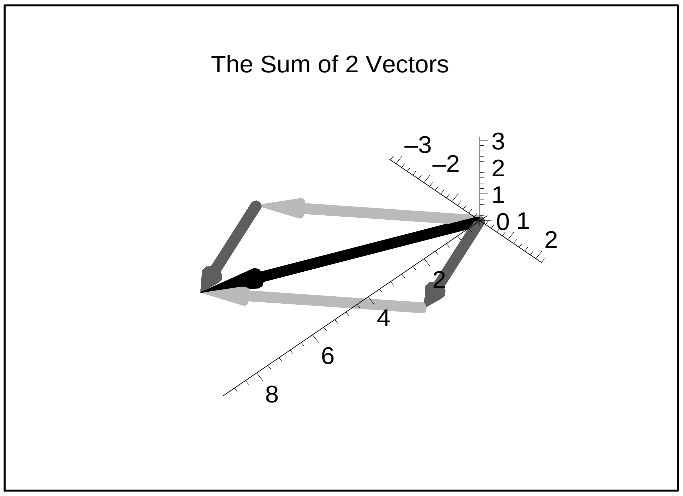
```
> V:=Vector([5, -3, 2]);
```

$$V := \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

```
> W:=Vector([4, 2, 1]);
```

$$\mathrm{W} := \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
> VectorSumPlot(V,W);
```



7. Vektoriaus ir skaičiaus sandauga
užrašoma taip pat, kaip dviejų skaičių sandauga:

```
> 'V*2'=V*2;
```

$$2\,V = \begin{bmatrix} 10 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

8. Kampas tarp vektorių

Tarkime, jog turime du vektorius:

```
> V:=vector(3,i->i^2);
```

$$V := [1,\,4,\,9]$$

```
> W:=vector(3,i->sqrt(i));
```

$$\mathrm{W} := [1,\,\sqrt{2},\,\sqrt{3}]$$

Apskaičiuosime jų sudaromą kampą komanda **angle**:

```
> Kampas:=angle(V,W);
```

$$Kampas := \arccos(\frac{(1+4\sqrt{2}+9\sqrt{3})\sqrt{98}\sqrt{6}}{588})$$

Jei tokia trigonometrinė išraiška mums netinka, galime rasti apytikslę kampo reikšmę naudodami komandą **evalf** (rezultatą gausime radianais):

```
> Kampas[rad]:=evalf(Kampas);
```

$$Kampas_{rad} := 0.4093463308$$

To paties kampo reikšmė laipsniais:

```
> Kampas[laips]:=evalf((180/Pi)*angle(V,W));
```

$$Kampas_{laips} := 23.45381710$$

9. Vektorių skaliarinę sandaugą

apskaičiuojame naudodami komandą **dotprod:**

```
> VW:=dotprod(V,W);
```

$$VW := 1 + 4\sqrt{2} + 9\sqrt{3}$$

Žinome, kad statmenų vektorių skaliarinė sandauga lygi nuliui. Jei vektorius **U** šitoks:

```
> U:=vector(3,i->(-1)^i*(3-i)^2);
```

$$U := [-4, 1, 0]$$

tai jis statmenas anksčiau apibrėžtam vektoriui **V**:

```
> UV:=dotprod(U,V);
```

$$UV := 0$$

Vektoriaus ilgį randame pasitelkę skaliarinę sandaugą (vektoriaus ilgio kvadratas lygus vektoriaus ir to paties vektoriaus skaliarinei sandaugai):

```
> Ssandauga:=dotprod(V,V);
```

$$Ssandauga := 98$$

Kvadratinę šaknį ištrauksime komanda **sqrt**:

```
> Ilgis:=sqrt(Ssandauga);
```

$$Ilgis := 7\sqrt{2}$$

Apytikslę šio skaičiaus reikšmę gausime komanda **evalf:**

```
> Apytikslisilgis:=evalf(Ilgis);
```

$$Apytikslisilgis := 9.899494934$$

10. Vektorinė sandauga

apskaičiuojama naudojant komandą **crossprod**:

```
> Vsandauga:=crossprod(V,W);
```

$$Vsandauga := [4\sqrt{3} - 9\sqrt{2},\ 9 - \sqrt{3},\ \sqrt{2} - 4]$$

Apytikslėms reikšmėms rasti vėlgi praverčia komanda **evalf:**

```
> Apytiksliai:=evalf(crossprod(V,W));
```

$$Apytiksliai := [-5.799718828,\ 7.267949192,\ -2.585786438]$$

Pavaizduokime grafiškai vektorius ir jų vektorinę sandaugą. Naudosime subpaketą **Student[LinearAlgebra]**, todėl vektorius užrašome subpaketo komanda **Vector**:

```
> V[1]:=Vector(3,i->i^2);
```

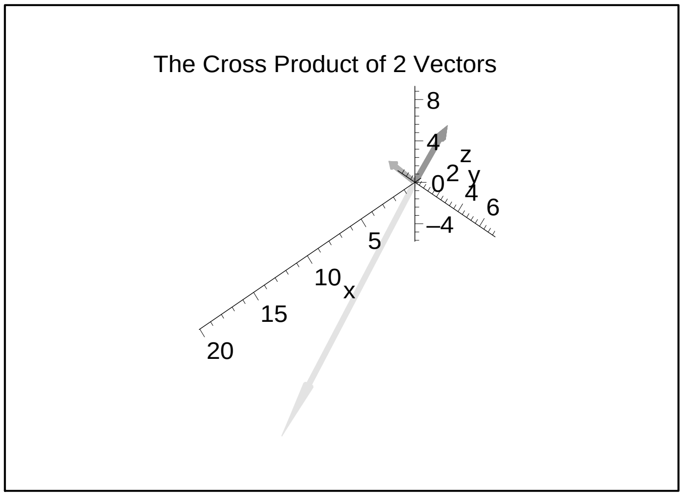
$$V_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

```
> W[1]:=Vector(3,i->(-1)^(i+1)*sqrt(i));
```

$$\mathrm{W}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Vektorius V_1, W_1 ir jų vektorinę sandaugą nubrėšime naudodami komandą **CrossProductPlot**:

```
> CrossProductPlot(V1, W1, vectorcolors=[green,cyan,
yellow]);
```



Čia **green, cyan, yellow**– vektorių grafinių vaizdų spalvos.

Žinome, kad **lygiagretainio**, kurio kraštinės yra vektoriai V_1 ir W_1, **plotas lygus jų vektorinės sandaugos ilgiui**:

```
> X:=crossprod(V1,W1);
```

$$X := [4\sqrt{3} + 9\sqrt{2},\ 9 - \sqrt{3},\ -\sqrt{2} - 4]$$

```
> lygiagretainio_plotas:=sqrt(dotprod(X,X));
```

$$lygiagretainio\_plotas := \sqrt{(4\sqrt{3} + 9\sqrt{2})^2 + (9 - \sqrt{3})^2 + (-\sqrt{2} - 4)^2}$$

```
> apytikslis_lygiagretainio_plotas:=evalf(%);
```

$$apytikslis\_lygiagretainio\_plotas := 21.64486210$$

11. Mišrioji vektorių sandauga
apskaičiuojama pagal jos apibrėžimą pasitelkus skaliarinę ir vektorinę sandaugas:

```
> a:=Vector( [1,8,3] );
```

$$a := \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

```
> b:=Vector( [-1,3,-5] );
```

$$b := \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

```
> c:=Vector( [6,-2,-2] );
```

$$c := \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

```
> Misrioji_sandauga_abc:=dotprod(crossprod(a,b),c);
```

$$Misrioji\_sandauga\_abc := -320$$

Primename, kad mišrioji sandauga lygi **gretasienio**, kurio briaunos yra vektoriai a, b ir c, **tūriui**. Vadinasi, ji lygi nuliui, jei vektoriai a, b ir c lygiagretūs tai pačiai plokštumai (yra **komplanarieji** vektoriai). Jos šeštoji dalis lygi keturkampės piramidės, kurios trys briaunos sutampa su vektoriais a,b ir c**, tūriui**.

Uždaviniai

1. Žinomos trikampio **ABC** viršūnės: **A(5; –2; 2) , B(–1; 4; 2) , C(–4; –1; 5)** . Raskite kraštinių **AB, AC** ir pusiaukraštinės **BE** ilgį, kampo **BAC** dydį (trigonometrine išraiška, laipsniais, radianais), taip pat naudodami vektorinę sandaugą apskaičiuokite trikampio **ABC** plotą **S**.

2. Žinomi keturi vektoriai **a(1, –3, 1), b(–1, –3, –1), c(–3, –3, 1), d(–21 , –39 , 3).** Įrodykite, kad vektoriai nėra

komplanarieji. Vektorių **d** išreikškite vektorių **a, b, c** tiesiniu dariniu: **d** = l**a** +m**b** + n**c**.
Pastaba. Tiesinio darinio koeficientams l, m, n rasti sudarykite tiesinių lygčių sistemą.

3. Raskite trikampės piramidės, kurios briaunos yra vektoriai $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $|b|\mathbf{a}$ ir $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ tūrį, kur $|b|$ pažymėtas vektoriaus **b** ilgis, $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ – vektorių **b** ir **c** vektorinė sandauga. Raskite pasirinkto tos piramidės šono plotą.

2.5 Penktasis laboratorinis darbas Analizinės geometrijos uždavinių sprendimas MAPLE terpėje

Plokštumos geometrijos uždaviniai

Naudosime MAPLE paketą **geometry**. Išspręskime kelis plokštumos geometrijos uždavinius.

1. Raskite tiesės, einančios per taškus A(–1, 3) ir B(1, 4), lygtį ir nubrėžkite tiesę.

Naudodami funkciją **line** apibrėžiame tiesę, einančią per taškus **A, B**, ir - funkciją **Equation**, parašome tiesės lygtį:

```
> restart;with(geometry):
> line(AB,[point(A,-1,3),point(B,1,4)]);
```

$$AB$$

```
> Equation(AB,[x,y]);
```

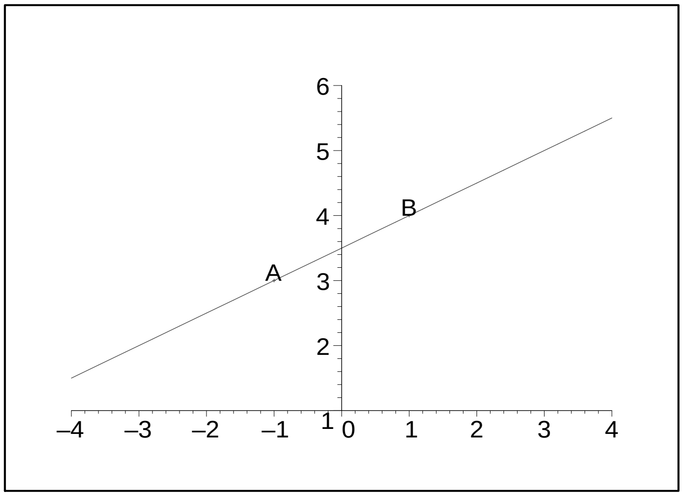
$$-7 - x + 2\,y = 0$$

Sutvarkome lygtį naudodami operatorių **sort** ir brėžiame tiesę pasitelkę **draw** funkciją:

```
> sort(%,[x,y]);
```

$$-x+2\,y-7=0$$

```
> draw([A,B,AB],axes=normal,view=[-4..4,1..6],
printtext=true);
```



2. Trikampio ABC kraštinių lygtys yra 4x − y − 4 = 0, 3 x + 5y − 34 = 0, 3x + 2y − 10 = 0. Raskite trikampio viršūnes ir plotą.

geometry paketo komanda **line** apibrėžiame trikampio kraštines:

```
> restart;with(geometry):
> line(AB,4*x-y-4=0,[x,y]);
```

$$AB$$

```
> line(BC,3*x+5*y-34=0,[x,y]);
```

$$BC$$

```
> line(AC,3*x+2*y-10=0,[x,y]);
```

$$AC$$

Komanda **triangle** galime apibrėžti trikampį, kai žinomos jo kraštinės:

```
> triangle(ABC,[AB,BC,AC],[x,y]);
```

$$ABC$$

Komanda **map** randame gautojo trikampio ABC viršūnių koordinates:

```
> vk:=map(coordinates,DefinedAs(ABC));
```

$$vk := [[\frac{54}{23}, \frac{124}{23}], [\frac{18}{11}, \frac{28}{11}], [-2, 8]]$$

Komanda **point** apibrėžiame šio trikampio viršūnes kaip taškus:

```
> point(A,vk[1]);point(B,vk[2]);point(C,vk[3]);
```

$$A$$
$$B$$
$$C$$

Komanda **coordinates** nurodo taško koordinates:

```
> coordinates(A);
```

$$[\frac{54}{23}, \frac{124}{23}]$$

Triangle komanda galime apibrėžti trikampį žinodami jo viršūnes:

```
> triangle(ABC,[A,B,C],[x,y]);
```

$$ABC$$

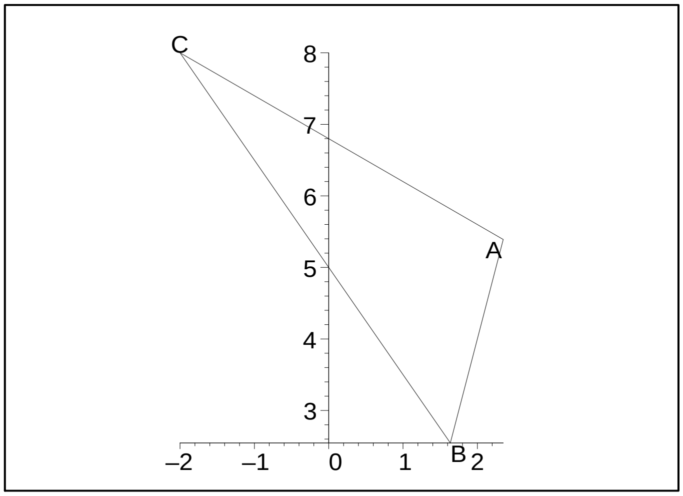
Trikampio plotą randame komanda **area**:

```
> area(ABC);
```

$$\frac{1800}{253}$$

Nubrėžiame trikampį naudodami **draw**:

```
> draw(ABC,axes=normal,printtext=true);
```



3. Žinomos trikampio viršūnės A(11; 6), B(–10; 6) ir C(–10,–16). Raskite trikampio pusiaukraštinės AE ir aukštinės BD ilgius, taip pat jų susikirtimo tašką M.

```
> restart:with(geometry):
triangle(ABC, [point(A,11,6), point(B,-10,6),
point(C,-10,-16)]);
```

$$ABC$$

Pusiaukraštinę ir aukštinę rasime naudodami funkcijas **median** ir **altitude**:

```
> median(pusiaukrastine,A,ABC,E);
```

$$pusiaukrastine$$

Raide E pažymėtas antrasis pusiaukraštinės galas. Analogiškai identifikuojame aukštinę:

```
> altitude(BD,B,ABC,D);
```

$$BD$$

Atstumą tarp taškų išmatuojame pasitelkę funkciją **distance**:

```
> distance(A,E);
```

$$\sqrt{562}$$

Line komanda apibrėžiame tiesę, žinodami du jos taškus:

```
> line(bd,[B,D],[x,y]);
```

$$bd$$

```
> line(ae,[A,E],[x,y]);
```

$$ae$$

Komanda **eguation** parašome tiesės lygtį:

```
> Equation(bd);
```

$$\frac{36036}{925} + \frac{9702\,x}{925} + \frac{10164\,y}{925} = 0$$

Naudodami **solve** funkciją galime rasti tiesių susikirtimo tašką:

```
> solve({Equation(bd),Equation(ae)});
```

$$\{y = \frac{-753}{683}, x = \frac{-1748}{683}\}$$

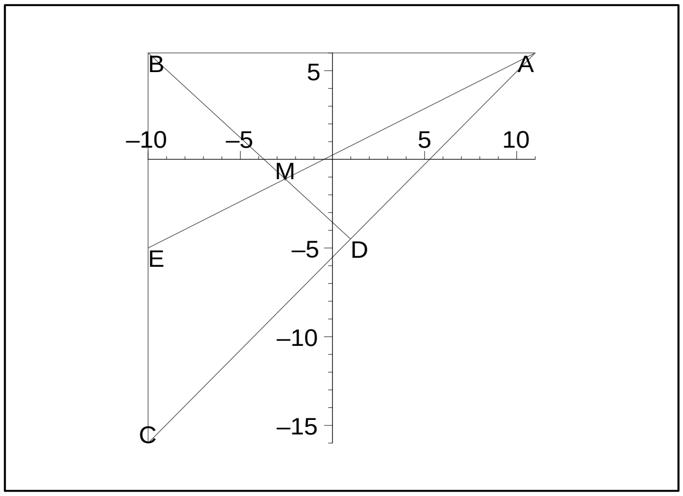
Pažymėkime raide **M** gautąjį tašką (naudojame **point** funkciją):

```
> point(M,subs(%,[x,y]));
```

$$M$$

Nubrėžiame brėžinį naudodami **draw**:

```
> draw([ABC,pusiaukrastine,BD,M],
> axes=normal,printtext=true,scaling=constrained);
```



4. Trikampyje, kurio viršūnės A(–4; 1), B(6; 1) ir C(6; –4), raskite pusiaukampinės, nubrėžtos iš taško B, ilgį. Į trikampį įbrėžkite apskritimą.

```
> triangle(ABC, [point(A,-4,1), point(B,6,1),
point(C,6,-4)]):
```

Funkcija **bisector** randa pusiaukampinę:

```
> bisector(BL,B,ABC,L);
```

$$BL$$

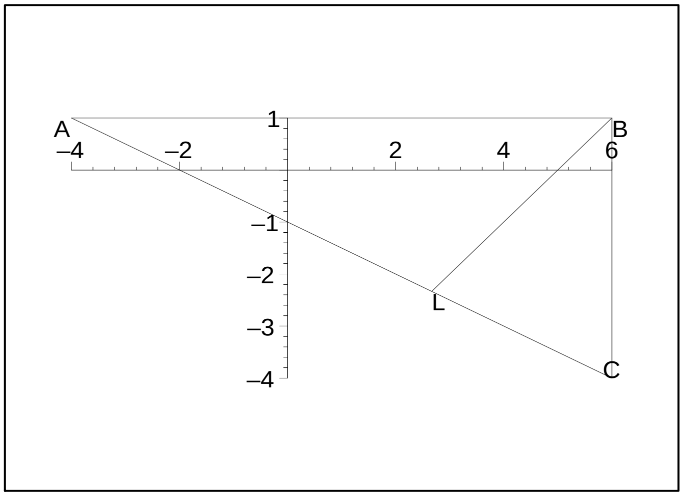
distance – jos ilgį:

```
> simplify(distance(B,L));
```

$$\frac{10\sqrt{2}}{3}$$

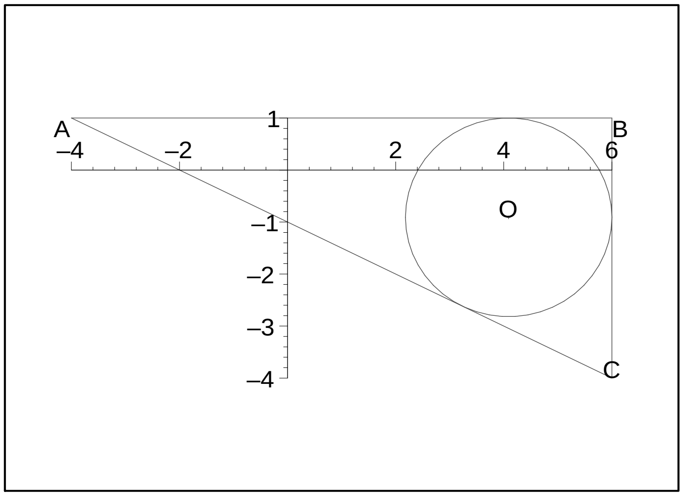
o **draw** brėžia brėžinį:

```
> draw([ABC,BL],printtext=true,axes=normal);
```



Funkcija **incircle** randa įbrėžtą į trikampį apskritimą, kurį pavadiname *įbrėžtasis*, o jo centrą pažymime raide **O**:

```
> incircle(įbrėžtasis,ABC,'centername'=O):
> draw([ABC,įbrėžtasis],printtext=true,
axes=normal);
```



5. Raskite elipsės $x^2 + 4y^2 = 8$ liestinių, einančių per tašką A(1; 3), lygtis.

Parašykime elipsės lygtį ir fiksuokime tašką **(1; 3)**:

```
> with(geometry):
eq:=x^2+4*y^2=8;x0:=1;y0:=3;
```

$$eq := x^2 + 4\,y^2 = 8$$
$$x0 := 1$$
$$y0 := 3$$

kai norime apibrėžti kreives, kurios yra kūgio pjūviai, praverčia **conic** funkcija. Naudodami ją apibrėžkime mūsų elipsę:

```
> conic(C,eq,[x,y]);
```

$$C$$

Detail komanda padės mums sužinoti kūgio pjūvio **C** parametrus: atpažins kreivę (elipsę), ras jos centro ir židinių koordinates, ašių ilgius:

```
> detail(C);
```

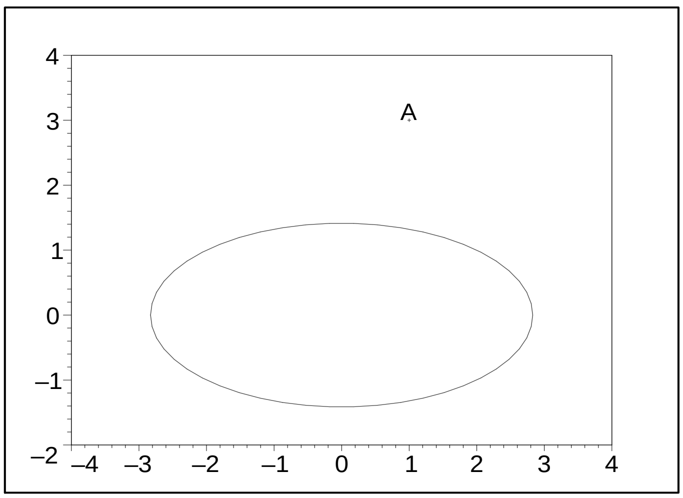
$$\begin{array}{l} \textit{name of the object}: \ C\backslash \\ \textit{form of the object}: \ \textit{ellipse2d}\backslash \\ \textit{center}: \ [0,\ 0]\backslash \\ \textit{foci}: \ [[-6\hat{\ }(1/2),\ 0],\ [6\hat{\ }(1/2),\ 0]]\backslash \\ \textit{length of the major axis}: \ 4*2\hat{\ }(1/2)\backslash \\ \textit{length of the minor axis}: \ 2*2\hat{\ }(1/2)\backslash \\ \textit{equation of the ellipse}: \ x\hat{\ }2+4*y\hat{\ }2-8 = 0 \end{array}$$

Nubrėžkime elipsę ir duotąjį tašką:

```
> point(A,x0,y0);
```

$$A$$

```
> draw([C,A],printtext=true,view=[-4..4,-2..4]);
```



Parašykime tiesės, einančios per šį tašką, lygtį:

```
> eq1:=y=y0+k*(x-x0);
```

$$eq1 := y = 3 + k\,(x-1)$$

ir įrašykime gautąjį **y** į elipsės lygtį naudodami komandą **subs**:

```
> subs(%,eq);
```

$$x^2 + 4\,(3 + k\,(x-1))^2 = 8$$

Išspręskime lygtį kintamojo **x** atžvilgiu:

```
> solve(%,x);
```

$$\frac{2\,(2\,k^2 - 6\,k + \sqrt{7\,k^2 - 7 + 6\,k})}{1 + 4\,k^2},\ \frac{2\,(2\,k^2 - 6\,k - \sqrt{7\,k^2 - 7 + 6\,k})}{1 + 4\,k^2}$$

Kiekvienai **k** reikšmei gauname pora **x** reikšmių. Jei tiesė liečia elipsę, tos reikšmės turi sutapti:

```
> solve(%[1]=%[2],k);
```

$$-\frac{3}{7} + \frac{\sqrt{58}}{7},\ -\frac{3}{7} - \frac{\sqrt{58}}{7}$$

```
> k1:=%[1];k2:=%%[2];
```

$$k1 := -\frac{3}{7} + \frac{\sqrt{58}}{7}$$

$$k2 := -\frac{3}{7} - \frac{\sqrt{58}}{7}$$

Įrašę šias reikšmes į tiesių lygtis, gauname du atsakymus:

```
> liestine1:=subs(k=k1,eq1);
```

$$liestine1 := y = 3 + (-\frac{3}{7} + \frac{\sqrt{58}}{7})\,(x-1)$$

```
> liestine2:=subs(k=k2,eq1);
```

$$liestine2 := y = 3 + (-\frac{3}{7} - \frac{\sqrt{58}}{7})\,(x-1)$$

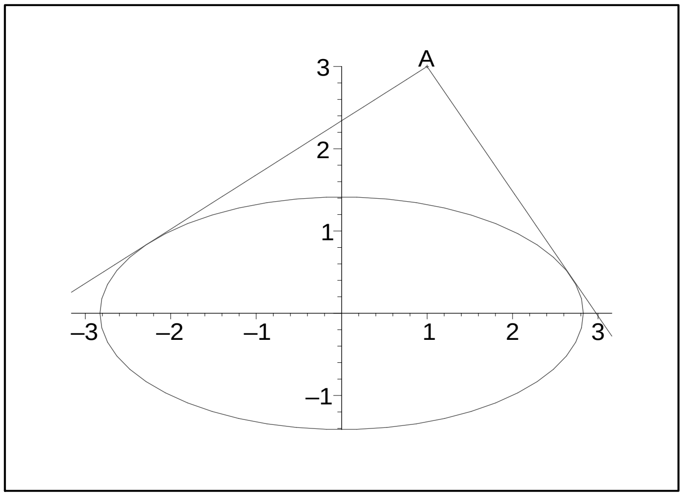
```
> line(L1,liestine1,[x,y]);
```

$$L1$$

```
> line(L2,liestine2,[x,y]);
```

$$L2$$

```
> draw([C,A,L1,L2],axes=normal,printtext=true);
```



Ieškomosios liestinių lygtys yra:

```
> Equation(L1);
```

$$\left(\frac{3}{7}-\frac{\sqrt{58}}{7}\right)x+y-\frac{24}{7}+\frac{\sqrt{58}}{7}=0$$

```
> Equation(L2);
```

$$\left(\frac{3}{7}+\frac{\sqrt{58}}{7}\right)x+y-\frac{24}{7}-\frac{\sqrt{58}}{7}=0$$

Erdvės geometrijos uždaviniai

Naudosime MAPLE erdvės geometrijos paketą **geom3d.**
Išspręskime kelis uždavinius.

1. Raskite plokštumos, einančios per taškus A(0, 2, –3), B(3, –6, 5) ir C(–4, 0,1), lygtį. Raskite trikampio ABC plotą ir jo kampų dydžius.

```
> restart:with(geom3d):
```

Pažymime taškus **A**, **B**, **C** naudodami funkciją **point**, apibrėžiame plokštumą **ABC** funkcija **plane**, ir funkcija **Eguation** rašome jos lygtį :

```
> point(A,0, 2, -3):
> point(B,3, -6, 5):
> point(C,-4, 0, 1):
> plane(pl,[A,B,C]):
> Equation(pl,[x,y,z]);
```

$$-26 - 16\,x - 44\,y - 38\,z = 0$$

Sutvarkome ir pažymime lygtį:

```
> %/(-2);
```

$$13 + 8\,x + 22\,y + 19\,z = 0$$

```
> lygtis:=sort(%,[x,y,z]);
```

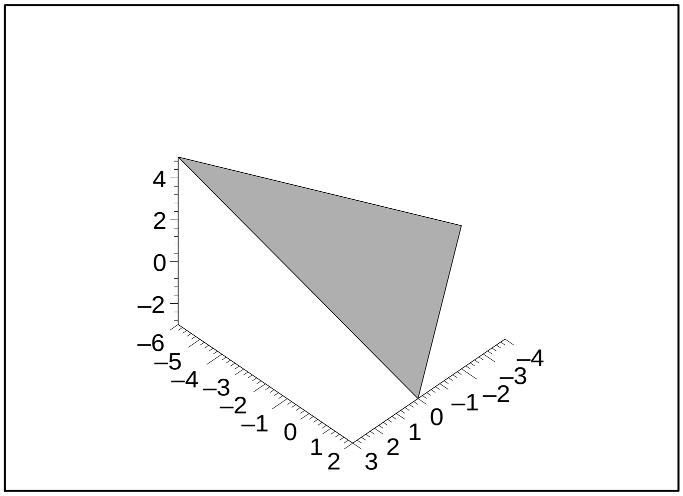
$$lygtis := 8\,x + 22\,y + 19\,z + 13 = 0$$

Funkcija **triangle** apibrėžiame trikampį **ABC** ir nubrėžiame jį naudodami **draw:**

```
> triangle(ABC,[A,B,C]);
```

$$ABC$$

```
> draw(ABC,axes=framed);
```



Trikampio plotą randame **area** funkcija:

```
> plotas:=area(ABC);
```

$$plotas := 3\sqrt{101}$$

o jo kampų dydžius – **Findangle**:

```
> kampasA:=FindAngle(A,ABC);
```

$$kampasA := \arccos(\frac{6\sqrt{137}}{137})$$

```
> kampasB:=FindAngle(B,ABC);
```

$$kampasB := \arccos(\frac{\sqrt{137}\sqrt{101}}{137})$$

```
> kampasC:=FindAngle(C,ABC);
```

$$kampasC := \frac{\pi}{2}$$

Atsakymą galime užrašyti išvardindami rastuosius dydžius:

```
> lygtis;'plotas'=plotas;kampai=kA,kB,kC;
```

$$8\,x+22\,y+19\,z+13=0$$

$$plotas=3\,\sqrt{101}$$

$$kampai=kA,\,kB,\,kC$$

2. Rasti kampą, kurį sudaro tiesė (x − 1)/3 = (y + 2)/1 = (z − 1)/2 ir plokštuma 5x + y − z + 4 = 0.

Apibrėžiame plokštumą naudodami funkciją **plane**:

```
> restart:with(geom3d):
> plane(pl,5*x+y-z+4 = 0,[x,y,z]):
```

Tiesės lygtį užrašome pasitelkę **line** komandą, nurodydami jos tašką ir krypties vektoriaus koordinates:

```
> line(t,[point(A,1,-2,1),[3,1,2]]):
```

FindAngle randame ieškomąjį kampą:

```
> FindAngle(pl,t);
```

$$\arcsin(\frac{\sqrt{42}}{9})$$

Galime rasti apytikslį kampo dydį radianais naudodami komandą **evalf**, o jo išraišką laipsniais – **convert**;

```
> evalf(%);
```

$$0.8039209181$$

```
> evalf(convert(%,degrees));
```

$$46.06127567\,degrees$$

3. Rasti taško A(1, 2, 3) atstumą iki tiesės x = 7 − 2 t, y = 4 − 4 t, z = 5 + 4 t.

point apibrėžia tašką **A**:

```
> point(A,1,2,3):
```

line funkcija apibrėžia tiesę pagal jos parametrinę lygtį:

```
> line(T,[7-2*t,4-4*t,5+4*t],t):
```

o **distance** randa atstumą nuo taško iki tiesės:

```
> distance(A,T);
```

$$2\sqrt{10}$$

4. Žinoma sukimosi cilindro ašis x = 8 + t, y = 4 − 2 t, z = 7 + 2 t ir cilindro taškas A(1, 2, 3). Parašykite cilindro lygtį ir nubrėžkite jį.

```
> line(T,[8+t,4-2*t,7+2*t],t):
> point(A,1,2,3):
> point(M,x,y,z):
```

Čia **M** – bet kuris cilindro taškas. Cilindro lygtį galime parašyti sulygindami taškų **A** ir **M** atstumus iki jo ašies:

```
> distance(A,T)=distance(M,T);
```

$$\frac{10\sqrt{5}}{3} = \frac{\sqrt{5\,y^2 - 128\,y + 8\,y\,z + 965 - 70\,z + 5\,z^2 - 4\,z\,x - 116\,x + 8\,x^2 + 4\,x\,y}}{3}$$

```
> %*3;
```

$$10\sqrt{5} = \sqrt{5\,y^2 - 128\,y + 8\,y\,z + 965 - 70\,z + 5\,z^2 - 4\,z\,x - 116\,x + 8\,x^2 + 4\,x\,y}$$

Supaprastiname lygties išraišką pakeldami abi jos puses kvadratu ir naudodami funkciją **sort**:

```
> map(a->a^2,%);
```

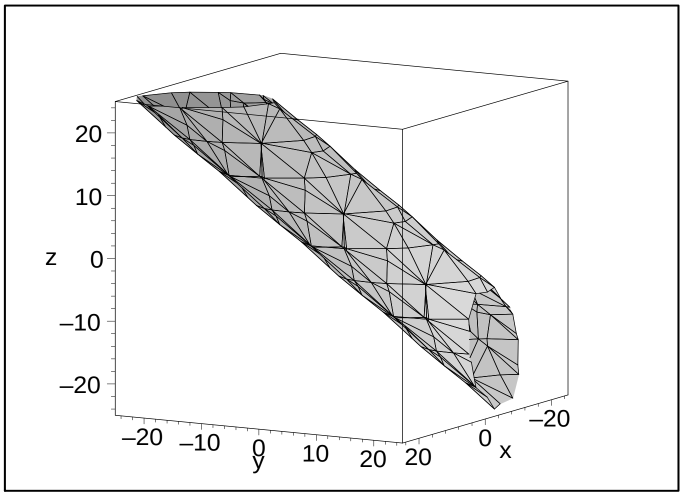
$$500 = 5\,y^2 - 128\,y + 8\,y\,z + 965 - 70\,z + 5\,z^2 - 4\,z\,x - 116\,x + 8\,x^2 + 4\,x\,y$$

```
> L:=sort(rhs(%)-lhs(%),[x,y,z])=0;
```

$$L := 8\,x^2 + 4\,x\,y - 4\,x\,z + 5\,y^2 + 8\,y\,z + 5\,z^2 - 116\,x - 128\,y - 70\,z + 465 = 0$$

Nubrėžiame brėžinį naudodami funkcijas **implicitplot3d**, **plots**, **display3d**:

```
> plots[implicitplot3d](L,x=-25..25,y=-25..25,
z=-25..25):
> draw(T):
> plots[display3d]([%%,%],
> view=[-25..25,-25..25,-25..25],axes=boxed,
> orientation=[30,80]);
```



Uždaviniai.

1. Trikampio viršūnės yra **A(2,4), B (5,10), C (–1,–1)**. Įbrėžkite į trikampį ir apibrėžkite apie trikampį apskritimus. Raskite šių apskritimų lygtis ir centrų koordinates.

2. Duota elipsė

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 16.$$

Nubrėžkite elipsės stygą, taške **A(2,–1)** pasidalijančią pusiau. Parašykite jos lygtį. Raskite trikampio, kurio viršūnės yra stygos galuose ir elipsės centre, plotą.

3. Raskite plokštumos, einančios per taškus **A(1, 3, 2), B(4, –5, 6) ir C(–3, 1, 2)**, lygtį. Raskite trikampio **ABC** plotą, perimetrą ir aukštinę, nuleistą iš viršūnės **A.**

2.6 Šeštasis laboratorinis darbas Dviejų ir trijų kintamųjų kvadratinės formos

n kintamųjų $x_1, x_2....x_n$ **kvadratine forma** vadiname reiškinį:

$$Q(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum a_{ij} x_i x_j,$$

kurio koeficientai tenkina sąlygas

$$a_{ij} = a_{ji}, i, j = 1, ..., n.$$

Akivaizdu, kad kvadratinė forma vienareikšmiškai apibrėžiama **simetrine** ($a_{ij} = a_{ji}$) matrica

$$A = (a_{ij}), i, j = 1..n.$$

Matricos simetriškumo sąlygą galime užrašyti tokiu pavidalu:

$$a_{ij} = (a_{ij} + a_{ji})/2.$$

Jei raide x pažymėsime vektorių $(x_1, x_2, ..., x_n)$, o x' – jo transponuotąjį vektorių, tai kvadratinę formą galime užrašyti taip:

$$Q(x) = x'Ax,$$

arba

$$Q(x) = (x, Ax),$$

čia (x, Ax) žymi vektorių x ir Ax skaliarinę sandaugą.
Yra žinoma, kad simetrinės matricos A tikrinės vertės yra **realios**.
Ortogonaliąja matrica P vadiname tokią matricą, kurios atvirkštinė matrica lygi jos pačios transponuotajai matricai:

$$P'P = E,$$

kur E – vienetinė matrica. Egzistuoja ortogonalioji matrica P, kuri **diagonalizuoja** simetrinę matricą A. Taigi jei DA pažymėsime matricos A diagonalizuotąją matricą, tai

$$DA = P'AP,$$

o matricos

$$DA = (d_{ij}),\ \ i, j = 1..n$$

elementai, kurie nėra pagrindinės matricos įstrižainės elementai, lygūs nuliui:

$$d_{ij} = 0, i \neq j.$$

Tiesiniu atvaizdavimu P transformuojant vektorinę erdvę $R^n, x \in R^n$: $x = Py$, čia $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, kvadratinė forma $Q(x)$ įgyja **kanoninį** pavidalą $DQ(y)$:

$$DQ(y) = y'DAy = (y, DAy).$$

Akivaizdu, kad

$$DQ(y) = \sum_{i=1}^{n} d_{ii}{y_i}^2.$$

Dalis šios sumos dėmenų gali būti lygūs nuliui. Kanoninio pavidalo kvadratinės formos $DQ(y)$ nenulinių dėmenų skaičius vadinamas kvadratinės formos $Q(x)$ **rangu**. Teigiamų dėmenų skaičius vadinamas formos **signatūra**. Forma $Q(x)$ vadinama **teigiamai (neigiamai) apibrėžta**, jei visi matricos DA elementai yra **teigiami (neigiami)**. Kitais atvejais sakome, kad $Q(x)$ yra **neapibrėžto ženklo** kvadratinė forma.

Kadangi

$$(x, Ax) = Q(x) = DQ(y) = (y, DAy), \text{ jei } x = Py,$$

teigiamas kvadratinės formos $Q(x)$ apibrėžtumas reiškia, kad skaliarinė sandauga

$$(x, Ax) \neq 0$$

jei $x \in R^n$ – bet koks nenulinis vektorius.

Naudosime paketus **linalg, plots, plottools**:

```
> restart;
> with(linalg):  with(plots):  with(plottools):
```

1. Tarkim, turime dviejų kintamųjų kvadratinę formą

```
> Q:=3*x[1]^2-2*x[2]^2-12*x[1]*x[2];X:=[x[1],x[2]];
N:=nops(X);
```

$$Q := 3\,x_1{}^2 - 2\,x_2{}^2 - 12\,x_1\,x_2$$
$$X := [x_1,\, x_2]$$
$$N := 2$$

Sudarome šitos kvadratinės formos matricą:

```
> A:= matrix(2,2,[[3,-6],[-6,-2]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$$

Randame jos **tikrinius vektorius x** ir **tikrines reikšmes** λ (tenkinančius lygtį $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$)

```
> Tikrinis_vektorius := [eigenvectors(A)];
```

$$Tikrinis\_vektorius := [[-6,\, 1,\, \{\left[1,\, \frac{3}{2}\right]\}],\, [7,\, 1,\, \{\left[\frac{-3}{2},\, 1\right]\}]]$$

Normuojame tikrinius vektorius (pakeičiame juos lygiagrečiais pradiniams vienetinio ilgio vektoriais) **normalize** komanda :

```
> v1 := normalize(Tikrinis_vektorius[1][3][1]);
> v2 := normalize(Tikrinis_vektorius[2][3][1]);
```

$$v1 := \left[\frac{1}{13}\sqrt{13}\sqrt{4},\, \frac{3}{26}\sqrt{13}\sqrt{4}\right]$$

$$v2 := \left[-\frac{3}{26}\sqrt{13}\sqrt{4},\, \frac{1}{13}\sqrt{13}\sqrt{4}\right]$$

Naudodami **augment** komandą konstruojame matricą P, kuri diagonalizuoja matricą A:

```
> P := augment(v1,v2);
```

$$P := \begin{bmatrix} \frac{1}{13}\sqrt{13}\sqrt{4} & -\frac{3}{26}\sqrt{13}\sqrt{4} \\ \frac{3}{26}\sqrt{13}\sqrt{4} & \frac{1}{13}\sqrt{13}\sqrt{4} \end{bmatrix}$$

$P'AP$ - diagonalioji matrica:

```
> DA := simplify(evalm(transpose(P) &* A &* P));
```

$$DA := \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Įsitikiname, kad P - ortogonalioji matrica:

```
> evalm(transpose(P)&*P):simplify(%);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Randame diagonalizuotąją kvadratinę formą:

```
> Y:=[y[1],y[2]];
```

$$Y := [y_1,\, y_2]$$

```
> DQ:=evalm(transpose(Y)&*DA&*Y);
```

$$DQ := -6\,{y_1}^2 + 7\,{y_2}^2$$

Akivaizdu, kad kvadratinė forma yra neapibrėžto ženklo, jos rangas yra 2, o signatūra lygi 1.
Įsitikinkime, kad keitinys $X = PAY$ kanonizuoja kvadratinę formą Q:

```
> evalm(X=PA&*Y);
```

$$[x_1,\, x_2] = \left[\frac{1}{13}\sqrt{13}\,\sqrt{4}\,y_1 - \frac{3}{26}\sqrt{13}\,\sqrt{4}\,y_2,\ \frac{3}{26}\sqrt{13}\,\sqrt{4}\,y_1 + \frac{1}{13}\sqrt{13}\,\sqrt{4}\,y_2\right]$$

```
> K:=[seq(x[k]=rhs(%)[k],k=1..nops(X))];
```

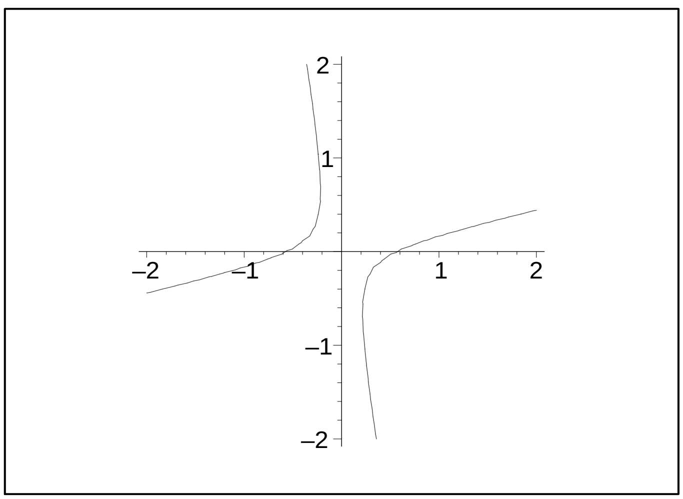
$$K := [x_1 = \frac{1}{13}\sqrt{13}\,\sqrt{4}\,y_1 - \frac{3}{26}\sqrt{13}\,\sqrt{4}\,y_2,\ x_2 = \frac{3}{26}\sqrt{13}\,\sqrt{4}\,y_1 + \frac{1}{13}\sqrt{13}\,\sqrt{4}\,y_2]$$

```
> subs(K,Q):expand(%);
```

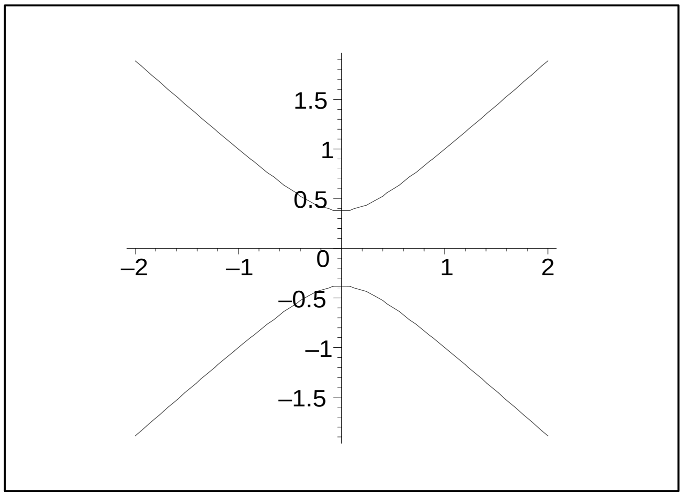
$$-6\,{y_1}^2 + 7\,{y_2}^2$$

Naudodami **implicitplot** komandą nubrėžkime kreives $Q(X) = 1$ ir $DQ(X) = 1$ ir palyginkime jas:

```
> implicitplot(Q(X)=1,x=-2..2,y=-2..2,
scaling=constrained);
```



```
> implicitplot(DQ(X)=1,x=-2..2,y=-2..2,
scaling=constrained);
```



Taigi galime įsivaizduoti, kaip tiesinė transformacija $X = PY$ veikia erdvę.

2. Tarkime, jog turime trijų kintamųjų kvadratinę formą:

```
> restart:with(linalg):
> Q:=x[1]^2+x[2]^2+5*x[3]^2-6*x[1]*x[2]-2*x[1]*x[3]+2*x[2]*x[3];
```

$$Q := {x_1}^2 + {x_2}^2 + 5\,{x_3}^2 - 6\,x_1\,x_2 - 2\,x_1\,x_3 + 2\,x_2\,x_3$$

Pažymime kintamuosius

```
> indets(Q):X:=sort(convert(%,list));N:=nops(%);
```

$$X := [x_1,\, x_2,\, x_3]$$

$$N := 3$$

ir randame kvadratinės formos matricą A:

```
> A := hessian(Q/2,X);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Kadangi simetrinė matrica A diagonalizuojama, jos diagonalusis pavidalas sutampa su jos **Žordano** pavidalu. Todėl galime kvadratinės formos matricos A diagonaliojo pavidalo DA ir diagonalizuojančiosios matricos P ieškoti naudodami **jordan** komandą:

```
> DA := jordan(A,R);
```

$$DA := \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Jei mums reikia tik kanoninio kvadratinės formos $\mathbf{Q}$ pavidalo, jį galime gauti taip:

```
> Y:=[y||(1..nops(X))];evalm(transpose(Y)&*DA&*Y);
```

$$Y := [y1,\ y2,\ y3]$$

$$-2\,y1^2 + 3\,y2^2 + 6\,y3^2$$

Jei mums reikia kvadratinės formos kintamųjų keitinio, kuris kanonizuoja formą, randame diagonalizuojančią matricą R:

```
> print(R);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix}$$

Naudodami **col** komandą išskiriame matricos R vektorius – stulpelius:

```
> v:=[col(R,1..N)];
```

$$v := \left[\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{6}, \frac{-1}{6}, \frac{-1}{3}\right]\right]$$

GramSchmidt ir **normalize** komandomis ortonormuojame vektorius:

```
> GramSchmidt(v,normalized);
```

$$\left[\left[\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 0\right], \left[\frac{1}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3}\right], \left[\frac{1}{6}\sqrt{6}, -\frac{1}{6}\sqrt{6}, -\frac{1}{3}\sqrt{6}\right]\right]$$

ir sudarome ortogonaliąją matricą P, jos stulpeliams naudodami ortonormuotuosius vektorius:

```
> P:=transpose(matrix(N,N,%));orthog(P);
```

$$P := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{6}\sqrt{6} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{3}\sqrt{3} & -\frac{1}{6}\sqrt{6} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$$true$$

Apibrėžiame keitinio kintamuosius

```
> Y:=[y||(1..nops(X))];
```

$$Y := [y1,\ y2,\ y3]$$

ir patį keitinį $K = PY$:

```
> evalm(X=P&*Y);
```

$$[x_1,\, x_2,\, x_3] = \left[\frac{1}{2}\sqrt{2}\, y1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}\, y2 + \frac{1}{6}\sqrt{6}\, y3,\ \frac{1}{2}\sqrt{2}\, y1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}\, y2 - \frac{1}{6}\sqrt{6}\, y3,\right.$$
$$\left.\frac{1}{3}\sqrt{3}\, y2 - \frac{1}{3}\sqrt{6}\, y3\right]$$

```
> K:=[seq(x[n]=rhs(%)[n],n=1..N)];
```

$$K := [x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, y1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}\, y2 + \frac{1}{6}\sqrt{6}\, y3,\ x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, y1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}\, y2 - \frac{1}{6}\sqrt{6}\, y3,$$
$$x_3 = \frac{1}{3}\sqrt{3}\, y2 - \frac{1}{3}\sqrt{6}\, y3]$$

Įsitikiname, kad šis keitinys kanonizuoja kvadratinę formą **Q**:

```
> simplify(subs(K,Q));
```

$$-2\, y1^2 + 3\, y2^2 + 6\, y3^2$$

Šitaip galime rasti teoriškai bet kokio kintamųjų skaičiaus kvadratinės formos kanoninį pavidalą.

3. Raskime kvadratinės formos diagonalinį pavidalą Lagranžo metodu.

```
> restart:with(linalg):with(student):
```

Tarkime, kad mūsų kvadratinė forma tokia:

```
> Q:=3*x1^2+3*x2^2+3*x3^2-2*x1*x2-2*x1*x3+2*x2*x3;
```

$$Q := 3\, x1^2 + 3\, x2^2 + 3\, x3^2 - 2\, x1\, x2 - 2\, x1\, x3 + 2\, x2\, x3$$

completesquare komanda kvadratinėje formoje išskiriame pilną kvadratą kintamojo x_1 atžvilgiu:

```
> completesquare(Q,x1);
```

$$3\,(x1 - \frac{1}{3}\, x2 - \frac{1}{3}\, x3)^2 + \frac{8}{3}\, x2^2 + \frac{4}{3}\, x2\, x3 + \frac{8}{3}\, x3^2$$

Likusioje kvadratinės formos dalyje išskiriame pilną kvadratą kintamojo x_2 atžvilgiu:

```
> op(1,%)+completesquare(%-op(1,%),x2);
```

$$3\,(x1-\frac{1}{3}\,x2-\frac{1}{3}\,x3)^2+\frac{8}{3}\,(x2+\frac{1}{4}\,x3)^2+\frac{5}{2}\,x3^2$$

Naujieji kvadratinės formos kintamieji - pilnųjų kvadratų pagrindai:

```
> indets(%,anything^2);
> {y1=op(1,%[1]),y2=op(1,%[2]),y3=op(1,%[3])};
> K:=solve(%,{x||(1..3)});
```

$$\{(x2+\frac{1}{4}\,x3)^2,\,(x1-\frac{1}{3}\,x2-\frac{1}{3}\,x3)^2,\,x3^2\}$$

$$\{y2=x1-\frac{1}{3}\,x2-\frac{1}{3}\,x3,\,y3=x3,\,y1=x2+\frac{1}{4}\,x3\}$$

$$K:=\{x1=y2+\frac{1}{4}\,y3+\frac{1}{3}\,y1,\,x2=y1-\frac{1}{4}\,y3,\,x3=y3\}$$

Pakeitę kintamuosius randame kanoninį kvadratinės formos pavidalą:

```
> subs(K,Q):simplify(%);
```

$$3\,y2^2+\frac{5}{2}\,y3^2+\frac{8}{3}\,y1^2$$

Kvadratinės formos, kurios rangas mažesnis už jos kintamųjų skaičių, pavyzdys

```
> A3:=matrix(3,3,[1,2,3,2,0,2,3,2,5]);
```

$$A3:=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&0&2\\3&2&5\end{bmatrix}$$

```
> X:=([x,y,z]);
```

$$X:=[x,\,y,\,z]$$

```
> Q3(X):=expand(evalm(transpose(X)&*A3&*X));
```

$$Q3([x,\, y,\, z]) := x^2 + 4\,x\,y + 6\,x\,z + 4\,y\,z + 5\,z^2$$

```
> DQ3:=jordan(A3,P);
```

$$\mathit{DQ3} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3+\sqrt{21} & 0 \\ 0 & 0 & 3-\sqrt{21} \end{bmatrix}$$

```
> print(P);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{21}}{42}+\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{21}}{42}+\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{21}}{14}-\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{21}}{14}-\frac{1}{6} \\ \frac{-1}{3} & \frac{\sqrt{21}}{21}+\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{21}}{21}+\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Kvadratinės formos kanoninis pavidalas yra:

```
> X1:=([x1,y1,z1]);
```

$$\mathit{X1} := [\mathit{x1},\, \mathit{y1},\, \mathit{z1}]$$

```
> multiply(transpose(X1),DQ3,X1);
```

$$\mathit{y1}^2\,(3+\sqrt{21}) + \mathit{z1}^2\,(3-\sqrt{21})$$

Matome, kad kvadratinės formos rangas lygus 2.

Uždaviniai.

1. Duota kvadratinė forma $6\,x^2 + 5\,y^2 + 7\,z^2 - 4\,xy + 4\,xz$. Raskite jos kanoninį pavidalą, rangą, signatūrą. Užrašykite diagonalinę matricą ir ortogonaliąją diagonalizuojančią matricą. Patikrinkite jos ortogonalumą. Nustatykite kvadratinės formos apibrėžtumą. Įsitikinkite diagonalizuojancios transformacijos pasirinkimo teisingumu.

2. Tą patį padarykite su kvadratine forma
$Q := -4\,{x_1}^2 + 2\,{x_2}^2 - 5\,{x_3}^2 + 2\,x_1\,x_2 - 3\,x_1\,x_3 + 5\,x_2\,x_3.$

3. Sukonstruokite kvadratinę formą, kurios rangas mažesnis už kintamųjų skaičių. Nubrėžkite kreives (paviršius), kurių taškuose kvadratinės formos skaitinė reikšmė pastovi.

2.7 Septintasis laboratorinis darbas Antrosios eilės kreivės ir paviršiai MAPLE

Išspręskime keletą uždavinių.

1. Raskime kreivės
$12\,{x_1}^2 + 28\,{x_2}^2 + 12\,x_1\,x_2 - 48\,x_1 - 124\,x_2 + 133 = 0$ **kanoninį pavidalą.**

```
> restart;
> with(geometry):with(linalg):
> eq:= 12*x[1]^2+28*x[2]^2+12*x[1]*x[2]-48*x[1]-
124*x[2]+133= 0;
```

$$eq := 12\,{x_1}^2 + 28\,{x_2}^2 + 12\,x_1\,x_2 - 48\,x_1 - 124\,x_2 + 133 = 0$$

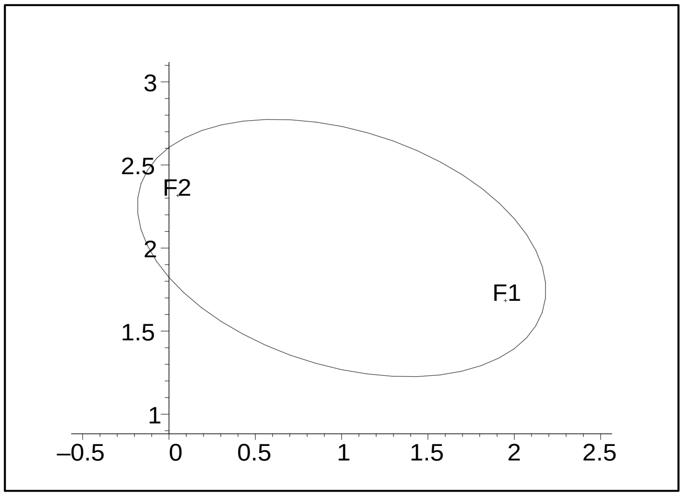
Kreivę atpažįstame naudodami **conic:**

```
> conic(‘k‘,eq,  [x[1],x[2]] ):
> form(k);
```

ellipse2d

Pasitelkę **draw** brėžiame elipsę ir jos židinius:

```
> foci([F1,F2],k):
> draw([k,F1,F2],scaling=constrained,axes=normal,printtext=true);
```



randame elipsės centro koordinates:

```
> C:=coordinates(center('o',k));
```

$$C := [1,\, 2]$$

Pastumiame koordinačių pradžios tašką į elipsės centrą:

```
> subs(x[1]=x[1]+C[1],x[2]=x[2]+C[2],Equation(k));
```

$$12\,(x_1+1)^2+28\,(x_2+2)^2+12\,(x_1+1)\,(x_2+2)-48\,x_1-163-124\,x_2=0$$

```
> eq1:=expand(%);
```

$$\mathit{eq1} := 12\,{x_1}^2-15+28\,{x_2}^2+12\,x_1\,x_2=0$$

```
> Q:=lhs(eq1)+15;
```

$$Q := 12\,{x_1}^2+28\,{x_2}^2+12\,x_1\,x_2$$

Analogiškai, kaip šeštajame laboratoriniame darbe, randame keitinį, suvedantį kvadratinę formą Q į kanoninį pavidalą:

```
> indets(Q):X:=sort(convert(%,list));N:=nops(%);
```

$$X := [x_1,\, x_2]$$

$$N := 2$$

```
> A := hessian(Q/2,X);
```

$$A := \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 28 \end{bmatrix}$$

```
> DA := jordan(A,R);
```

$$DA := \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix}$$

```
> v:=[col(R,1..N)];
```

$$v := [\left[\frac{9}{10}, \frac{-3}{10}\right], \left[\frac{1}{10}, \frac{3}{10}\right]]$$

```
> GramSchmidt(v,normalized);
```

$$[\left[\frac{1}{10}\sqrt{9}\sqrt{10}, -\frac{1}{30}\sqrt{9}\sqrt{10}\right], \left[\frac{1}{10}\sqrt{10}, \frac{3}{10}\sqrt{10}\right]]$$

```
> P:=transpose(matrix(N,N,%));
```

$$P := \begin{bmatrix} \frac{1}{10}\sqrt{9}\sqrt{10} & \frac{1}{10}\sqrt{10} \\ -\frac{1}{30}\sqrt{9}\sqrt{10} & \frac{3}{10}\sqrt{10} \end{bmatrix}$$

```
> Y:=[y||(1..nops(X))];
```

$$Y := [y1, y2]$$

```
> evalm(X=P&*Y);
```

$$[x_1, x_2] = \left[\frac{1}{10}\sqrt{9}\sqrt{10}\,y1 + \frac{1}{10}\sqrt{10}\,y2, -\frac{1}{30}\sqrt{9}\sqrt{10}\,y1 + \frac{3}{10}\sqrt{10}\,y2\right]$$

```
> K:=[seq(x[n]=rhs(%)[n],n=1..N)];
```

$$K := [x_1 = \frac{1}{10}\sqrt{9}\sqrt{10}\,y1 + \frac{1}{10}\sqrt{10}\,y2, x_2 = -\frac{1}{30}\sqrt{9}\sqrt{10}\,y1 + \frac{3}{10}\sqrt{10}\,y2]$$

```
> simplify(subs(K,eq1));
```

$$10\,y1^2 + 30\,y2^2 - 15 = 0$$

Kanoninė elipsės lygtis tokia:

```
> (%+(15=15))/15;
```

$$\frac{2}{3}\,y1^2 + 2\,y2^2 = 1$$

2. Raskite kreivės $7x_1^2 - 24x_1x_2 + 94x_1 - 120x_2 + 439 = 0$ **kanoninį pavidalą.**

```
> with(geometry):with(linalg):
> eq:=7*x[1]^2-24*x[1]*x[2]+94*x[1]-
120*x[2]+439 = 0;
```

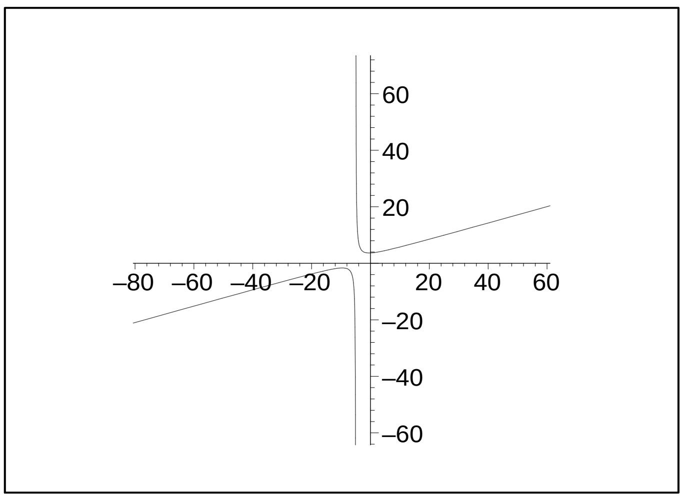
$$eq := 7\,{x_1}^2 - 24\,x_1\,x_2 + 94\,x_1 - 120\,x_2 + 439 = 0$$

```
> conic(`k`,eq,  [x[1],x[2]] ):
> form(k);
```

$$\mathit{hyperbola2d}$$

Brėžiame šią hiperbolę:

```
> draw(k,scaling=constrained,axes=normal);
```



randame jos centro koordinates:

```
> C:=coordinates(center('o',k));
```

$$C := [-5,\, 1]$$

ir lygiagrečiu koordinačių ašių postūmiu sutapatiname koordinačių pradžios tašką su hiperbolės centru:

```
> subs(x[1]=x[1]+C[1],x[2]=x[2]+C[2],Equation(k));
```

$$7\,(x_1-5)^2+94\,x_1-151-24\,(x_1-5)\,(x_2+1)-120\,x_2=0$$

```
> eq1:=expand(%);
```

$$eq1 := 7\,{x_1}^2+144-24\,x_1\,x_2=0$$

```
> Q:=lhs(eq)-144:
```

Ieškome kintamųjų keitinio, suvedančio kvadratinę formą Q į kanoninį pavidalą:

```
> indets(Q):X:=sort(convert(%,list)):N:=nops(%):
> A := hessian(Q/2,X):
> DA := jordan(A,R):
> v:=[col(R,1..N)]:
> GramSchmidt(v,normalized):
> P:=transpose(matrix(N,N,%)):
> Y:=[y||(1..nops(X))]:
> evalm(X=P&*Y):
> K:=[seq(x[n]=rhs(%)[n],n=1..N)];
```

$$K := [x_1=\frac{1}{25}\sqrt{9}\,\sqrt{25}\,y1+\frac{1}{25}\sqrt{16}\,\sqrt{25}\,y2,\; x_2=\frac{4}{75}\sqrt{9}\,\sqrt{25}\,y1-\frac{3}{100}\sqrt{16}\,\sqrt{25}\,y2]$$

Keičiame kintamuosius hiperbolės lygtyje $eq1$:

```
> simplify(subs(K,eq1));
```

$$-9\,{y1}^2+16\,{y2}^2+144=0$$

Kanoninė hiperbolės lygtis:

```
> (%-(144=144))/(-144);
```

$$\frac{1}{16}\,{y1}^2-\frac{1}{9}\,{y2}^2=1$$

3. Ištirkite kreivę $2x^2 + 3xy - 3x - 5y^2 - 4y + 1 = 0$.

```
> eq:=2*x^2+3*x*y-3*x-5*y^2-4*y+1 = 0;
```

$$eq := 2\,x^2 + 3\,x\,y - 3\,x - 5\,y^2 - 4\,y + 1 = 0$$

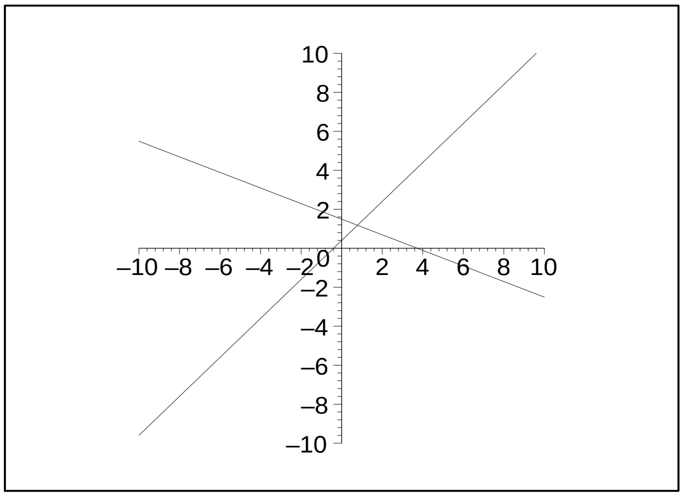
```
> conic(`k`,eq,  [x,y] ):
```

```
geometry/conic/classify:   "degenerate case: two intersecting lines"

Error, (in geometry/hyperbola_degenerate) expecting a name
```

Turime dvi susikertančias tieses:

```
> draw(k,scaling=constrained,axes=normal);
```



Tiesių lygtis galėsime parašyti išskaidę dauginamaisiais kairiąją lygties pusę:

```
> map(factor,eq);
```

$$(2\,x + 5\,y - 1)\,(x - y - 1) = 0$$

Tiesių lygtys yra:

$$x - y - 1 = 0$$

ir

$$2\,x + 5\,y - 1 = 0.$$

4. Ištirkite antrosios eilės kreivę $180x_1^2 + 180x_1x_2 + 45x_2^2 - 61x_1 - 29x_2 + 5 = 0$**.**

```
> eq:= 180*x[1]^2+180*x[1]*x[2]+45*x[2]^2-
61*x[1]-29*x[2]+5 = 0;
```

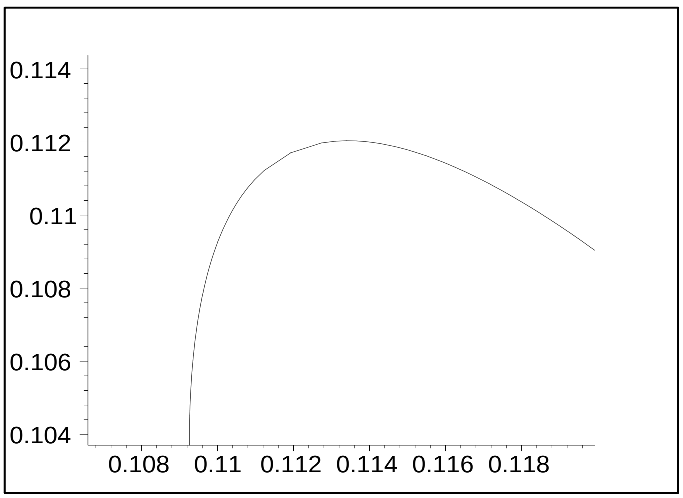
$$eq := 180\,{x_1}^2 + 180\,x_1\,x_2 + 45\,{x_2}^2 - 61\,x_1 - 29\,x_2 + 5 = 0$$

```
> p:='p':conic(`p`,eq,  [x[1],x[2]] ):
> form(p);
```

$$parabola2d$$

Šį kartą turime parabolę:

```
> draw(p,scaling=constrained,axes=normal);
```



Randame parabolės viršūnės koordinates

```
> C:=coordinates(vertex('v',p));
```

$$C := [\frac{1511}{13500}, \frac{377}{3375}]$$

Pastumiame koordinačių sistemos pradžios tašką į parabolės viršūnę:

```
> subs(x[1]=x[1]+C[1],x[2]=x[2]+C[2],Equation(p));
```

$$61\,x_1 + \frac{22801}{4500} + 29\,x_2 - 180\,(x_1 + \frac{1511}{13500})^2 -$$
$$180\,(x_1 + \frac{1511}{13500})\,(x_2 + \frac{377}{3375}) - 45\,(x_2 + \frac{377}{3375})^2 = 0$$

```
> eq1:=expand(%);
```

$$eq1 := \frac{3}{5}\,x_1 - \frac{6}{5}\,x_2 - 180\,{x_1}^2 - 180\,x_1\,x_2 - 45\,{x_2}^2 = 0$$

Ieškome kanonizuojančiojo kintamųjų keitinio:

```
> Q:=lhs(eq1):
> indets(Q):X:=sort(convert(%,list)):N:=nops(%):
> A := hessian(Q/2,X):
> DA := jordan(A,R):
> v:=[col(R,1..N)]:
> GramSchmidt(v,normalized):
> P:=transpose(matrix(N,N,%)):
> Y:=[y||(1..nops(X))]:
> evalm(X=P&*Y):
> K:=[seq(x[n]=rhs(%)[n],n=1..N)];
```

$$K := [x_1 = \frac{1}{5}\,\sqrt{5}\,y1 + \frac{1}{5}\,\sqrt{4}\,\sqrt{5}\,y2,\ x_2 = -\frac{2}{5}\,\sqrt{5}\,y1 + \frac{1}{10}\,\sqrt{4}\,\sqrt{5}\,y2]$$

Įstatome gautąjį keitinį K į lygtį $eq1$:

```
> simplify(subs(K,eq1));
```

$$\frac{3}{5}\,\sqrt{5}\,y1 - 225\,{y2}^2 = 0$$

ir gauname kanoninę parabolės lygtį

```
> %/225;
```

$$\frac{1}{375}\sqrt{5}\,y1 - y2^2 = 0$$

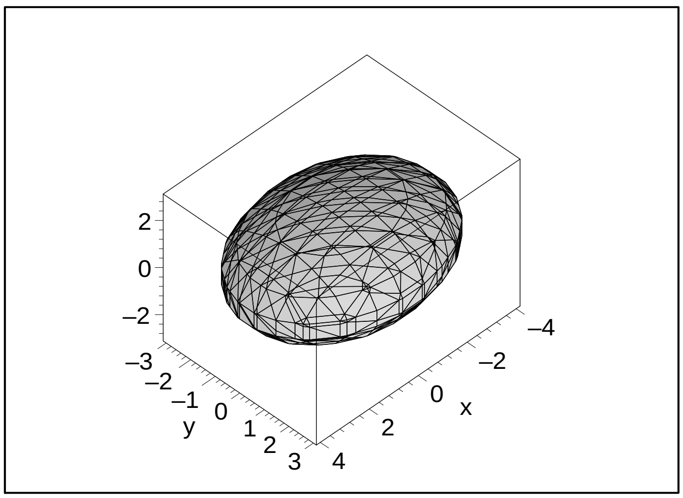
Antrosios eilės paviršiai

Naudodami **plots** ir **plottols** paketus ir funkciją **implicitplot3d** nubrėžkime kai kuriuos antros eilės sukimosi paviršius.

```
> with(plots):
> with(plottools):
```

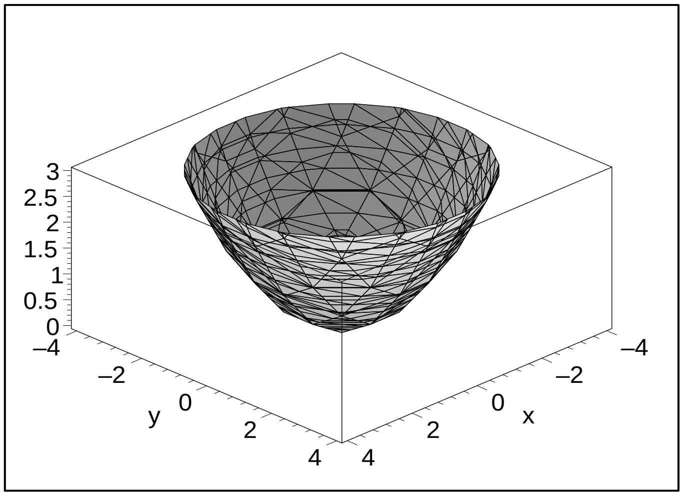
1. Sukimosi elipsoidas $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} + \frac{z^2}{3^2} = 1.$

```
> implicitplot3d(x^2/4^2+y^2/3^2+z^2/3^2=1,x=-4..4,
y=-3..3,z=-3..3,scaling=constrained, style=patch,
axes=boxed);
```



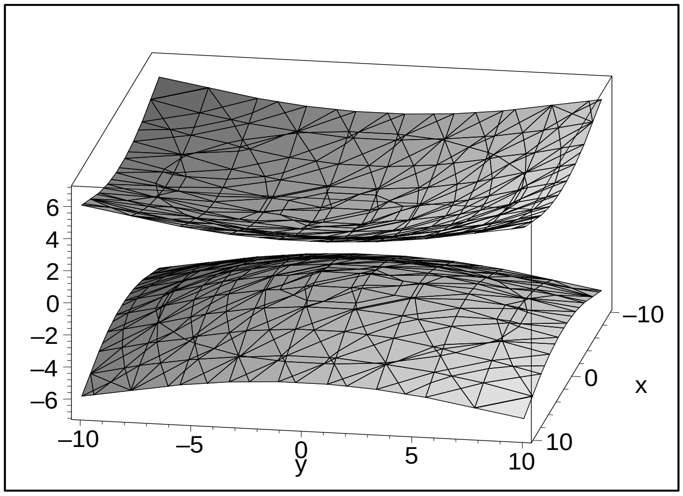
2. Sukimosi paraboloidas $z = \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{4^2}$.

```
> implicitplot3d(z=x^2/4+y^2/4,x=-4..4,y=-4..4,
z=0..3, scaling=unconstrained, style=patch,
axes=boxed);
```



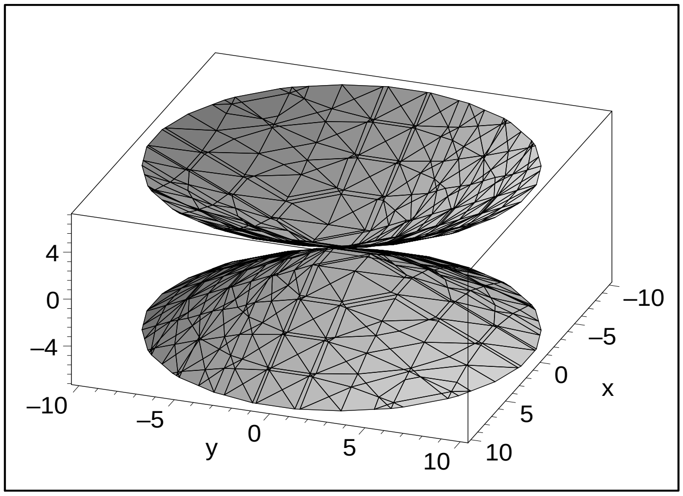
3. Sukimosi hiperboloidas $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{5^2}-\frac{z^2}{2^2}=-1$..

```
> implicitplot3d(x^2/5^2+y^2/5^2-z^2/2^2=-1,
x=-10..10,y=-10..10,z=-7..7,scaling=unconstrained,
style=patch,axes=boxed,orientation=[10,60]);
```



4. Kūgis $2z^2 = x^2 + y^2$.

```
>  implicitplot3d(2*z^2=x^2+y^2,x=-10..10,y=-10..10,
z=-7..7,scaling=unconstrained, style=patch,
axes=boxed, orientation=[20,45]);
```



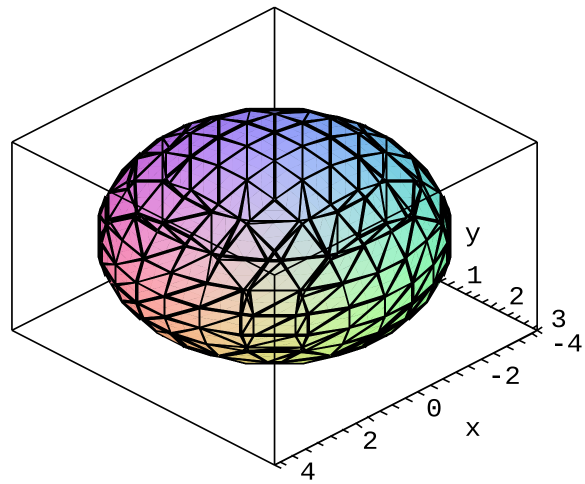
5. Elipsoidas.

Nubrėžkime elipsoidą, kurio ašys lygiagrečios koordinačių ašims Ox, Oy ir Oz ir kurio ašių ilgiai lygūs atitinkamai 8, 6 ir 4. Elipsoido lygtis yra

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} + \frac{z^2}{2^2} = 1.$$

Tada:

```
> implicitplot3d(x^2/16+y^2/9+z^2/4=1,x=-4..4,
y=-3..3,z=-2..2,scaling=unconstrained, style=patch,
axes=boxed, orientation=[20,45]);
```



Uždaviniai

1. Raskite kanonines kreivių
$25\,x^2 - 20\,x\,y + 50\,x + 40\,y^2 - 20\,y - 11 = 0$ ir
$41\,x^2 + 34\,x\,y - 284\,x + 29\,y^2 - 308\,y + 804 = 0$ lygtis.

2. Nubrėžkite dvišakį sukimosi paraboloidą ir cilindrą.

3. Nubrėžkite elipsoidą, kurio centras taške $(1, 2, 3)$, ašys lygiagrečios koordinačių ašims, o jų ilgiai atitinkamai lygūs $2, 3, 4$.

Literatūra

1. K. Bulota, P. Survila. Algebra ir skaičių teorija. 1. Vilnius: Mokslas, 1989. 412 p.
2. K. Bulota, P. Survila. Algebra ir skaičių teorija. 2. Vilnius: Mokslas, 1990. 416 p.
3. P. Katilius. Analizinė geometrija. Vilnius: Mintis, 1973. 564 p.
4. A. Matuliauskas. Algebra. Vilnius: Mokslas, 1985. 384 p.
5. V. Pekarskas, A. Pekarskienė. Tiesinės algebros ir analitinės geometrijos elementai. Kaunas: Technologija, 2004. 388 p.

Aleksandras KRYLOVAS, Eugenijus PALIOKAS

ALGEBRA IR GEOMETRIJA PASITELKIANT MAPLE

TEORIJOS SANTRAUKA IR LABORATORINIAI DARBAI

PIRMOJI DALIS

Vadovėlis technikos universitetų pagrindinėms studijoms

Redagavo N. Žuvininkaitė
Tiražas egz
Užsakymas
Leido Vilniaus Gedimino technikos universitetas,
leidykla "Technika", Saulėtekio al. 11, LT–2040 Vilnius
Spausdino UAB "Biznio mašinų kompanija",
Gedimino pr. 60, LT – 2002 Vilnius