2.3. Galiorkino metodas

Šiame poskyryje pradėsime nagrinėti dar vieną kraštinio uždavinio

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\Big(k(x)\dfrac{du}{dx}\Big) + q(x)u = f(x), \quad 0 < x < l\,, \\ -k(0)u'(0) + \beta u(0) = \mu_0, \quad u(l) = \mu_1 \end{cases} \tag{2.30}$$

sprendimo metodą. Tarsime, kad uždavinio koeficientai tenkina eliptiškumo sąlygas:

$$k(x) \geqslant k_0 > 0, \quad q(x) \geqslant 0, \quad \beta \geqslant 0\,.$$

Tolesnėje analizėje bus patogu (2.30) lygtį užrašyti operatoriniu pavidalu

$$Lu \equiv -\frac{d}{dx}\Big(k(x)\frac{du}{dx}\Big) + q(x)u - f = 0$$

arba

$$L_1 u = f\,.$$

2.3.1. Galiorkino metodo formulavimas

Imkime *bandomųjų* funkcijų (angl. *trial functions*) aibę:

$$\big\{\varphi_j(x), j = 1, \ldots, N\big\}\,.$$

Diferencialinio kraštinio uždavinio sprendinį aproksimuokime suma

$$y(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i(x)\,, \tag{2.31}$$

kurioje c_i yra kol kas nežinomi koeficientai. Nustatę koeficientus c_i, apytikslį sprendinį rasime visame intervale $[0, l]$, o ne tik atskiruose taškuose, kaip kad sprendžiant baigtinių skirtumų metodu.

Įvairiai parinkdami bandomąsias funkcijas $\big\{\varphi_i(x)\big\}$ ir formuluodami koeficientų radimo uždavinį, gausime skirtingus Galiorkino metodo variantus. Bandomosios funkcijos $\varphi_i(x)$ sudaro pilnąją tiesiškai nepriklausomų funkcijų sistemą.

Tokių funkcijų pavyzdžiai yra *laipsninės* funkcijos $\big\{x^i,\ i = 0, 1, \ldots, N\big\}$ ir *trigonometrinės* funkcijos $\big\{\sin(i\pi x),\ i = 1, \ldots, N\big\}$. Bandomųjų funkcijų sistemos pilnumas garantuoja apytikslio sprendinio $y(x)$ konvergavimą, t.y. galimybę (2.30) uždavinio sprendinį aproksimuoti baigtine suma norimu tikslumu.

Sudarome dar vieną *testuojamų* funkcijų (angl. *test functions*) aibę:

$$\{v_j(x), j = 1, \ldots, N\}.$$

Galiorkino metodo sprendinio $y(x)$ koeficientai randami iš tiesinės lygčių sistemos, gaunamos pareikalavus, kad netiktis Ly būtų ortogonali visoms testuojamoms funkcijoms $v_j(x)$:

$$\int_0^l Ly\ v_j(x)\ dx = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{2.32}$$

Klasikiniame Galiorkino metode testuojamos funkcijos sutampa su bandomosiomis funkcijomis.

Funkcinėje analizėje įrodoma, kad, jei funkcija $w(x)$ yra ortogonali visoms pilnosios funkcijų sistemos funkcijoms, tai $w(x) \equiv 0$. Todėl iš (2.32) tiesinių lygčių sistemos gauname:

$$Ly \to 0, \quad \text{kai } N \to \infty.$$

Toks sprendinio konvergavimas yra vadinamas *silpnuoju*, nes tik skaitinio sprendinio vaizdas Ly konverguoja į diferencialinio uždavinio sprendinio vaizdą.

Perrašykime (2.32) tiesinių lygčių sistemą išreikštiniu pavidalu. Operatorių Ly pakeiskime operatoriumi $L_1 y - f$ ir įrašykime į tiesinių lygčių sistemą (2.31) sumą:

$$\sum_{i=1}^{N} (L_1\varphi_i, \varphi_j)\ c_i = (f, \varphi_j), \quad j = 1, 2, \ldots, N, \tag{2.33}$$

čia, kaip visada, (u, v) pažymėjome dviejų funkcijų u ir v skaliarinę sandaugą:

$$(u, v) = \int_0^l u(x)v(x)\,dx.$$

Gautosios tiesinių lygčių sistemos

$$AC = F$$

matricos $A = (a_{ij})$ ir laisvųjų narių vektoriaus F koeficientai apskaičiuojami pagal šias formules:

$$a_{ij} = \big(L_1\varphi_j, \varphi_i\big), \qquad f_i = \big(f, \varphi_i\big), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant N,$$

o C yra nežinomų koeficientų c_i vektorius.

Tiesinių lygčių sistema turi vienintelį sprendinį, jei diferencialinis operatorius L_1 yra teigiamai apibrėžtas, t. y.

$$\big(L_1 y, y\big) \geqslant \gamma\,\big(y, y\big), \quad \gamma > 0\,.$$

Norėdami tai įrodyti, (2.32) tiesinių lygčių sistemą užrašykime taip:

$$\big(L_1 y, \varphi_j\big) = \big(f, \varphi_j\big), \quad j = 1, 2, \ldots, N\,,$$

kiekvieną jos lygtį padauginkime iš atitinkamo nežinomojo c_j ir visas lygtis sudėkime. Gausime lygybę:

$$\big(L_1 y, y\big) = \big(f, y\big)\,.$$

Naudodami Koši ir Buniakovskio nelygybę įvertiname šios lygybės dešiniąją pusę:

$$\big(f, y\big) \leqslant \|f\|\,\|y\|\,.$$

Iš operatoriaus L_1 teigiamojo apibrėžtumo gauname stabilumo įvertį:

$$\gamma \|y\|^2 \leqslant \big(L_1 y, y\big) \leqslant \|f\|\,\|y\|$$

arba

$$\|y\| \leqslant \frac{1}{\gamma}\,\|f\|\,.$$

Taigi egzistuoja vienintelis (2.32) tiesinių lygčių sistemos sprendinys. Tačiau tokio stabilumo įverčio neužtenka, kai norime įrodyti Galiorkino metodo sprendinio konvergavimą.

2.3.2. Spektrinis metodas

Parodysime, kad Galiorkino metodu specialiai parinkdami bandomąsias funkcijas galime gauti *spektrinio* (arba *Furje*) metodo algoritmą. Spręskime kraštinį diferencialinį uždavinį:

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2} + u(x) = f(x), \quad 0 < x < 1\,, \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0\,. \end{cases}$$

Pasirinkime bandomųjų funkcijų sistemą:

$$\varphi_j(x) = \sin(\pi j x), \quad j = 1, 2, \ldots, N\,.$$

Bandomosios funkcijos φ_j tenkina abi uždavinio kraštines sąlygas. Galiorkino metodo artinys yra

$$y(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j \sin(\pi j x)\,.$$

Apskaičiuokime operatorių $L_1 y$:

$$L_1 y = \sum_{j=1}^{N} c_j \left(\pi^2 j^2 + 1\right) \sin(\pi j x)\,.$$

Sudarydami (2.32) tiesinių lygčių sistemą pasinaudosime funkcijų $\{\sin(\pi j x)\}$ ortogonalumo savybe (patikrinkite patys):

$$\left(\varphi_j, \varphi_k\right) = \frac{1}{2}\delta_{jk}, \quad 1 \leqslant j, k \leqslant N\,,$$

čia δ_{jk} yra *Kronekerio simbolis*:

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k. \end{cases}$$

Tada tiesinių lygčių sistemos matrica A yra įstrižainė ir sprendinį C apskaičiuojame išreikštine forma:

$$c_j = \frac{2}{\pi^2 j^2 + 1} \int\limits_0^1 f(x)\, \sin(\pi j x)\, dx\,.$$

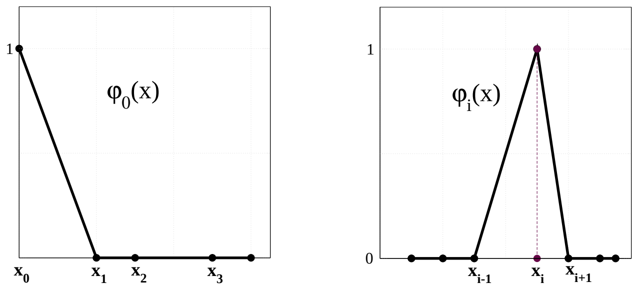
2.3.3. Baigtinių elementų metodas

Susipažinsime su dar vienu bandomųjų funkcijų konstravimo būdu, kuris dabar dažniausiai ir taikomas Galiorkino metodu sprendžiant kraštinį diferencialinį uždavinį:

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\Big(k(x)\dfrac{du}{dx}\Big) + q(x)u = f(x), \quad 0 < x < l\,, \\ -k(0)u'(0) + \beta u(0) = \mu_0, \quad u(l) = \mu_1\,. \end{cases} \tag{2.34}$$

Kaip ir taikant baigtinių skirtumų metodą intervale $[0, l]$ apibrėžkime diskretųjį tinklą:

$$\bar\omega_h = \left\{x_0 = 0, \;\; x_i = x_{i-1} + h_{i-0{,}5}, \;\; i = 1, 2, \ldots, N, \quad x_N = l\right\},$$



2.3 pav. Dalimis tiesinių bandomųjų funkcijų φ_i grafikai

kuris gali būti ir netolygusis. Intervalas $[x_{i-1}, x_i]$ yra vadinamas *elementu*. Diskrečiojo tinklo $\bar{\omega}_h$ taškai ir elementai sudaro *baigtinių elementų* tinklą.

Reikalaukime, kad bandomosios funkcijos $\varphi_i(x)$ tenkintų sąlygą:

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kai } i = j, \\ 0, & \text{kai } i \neq j. \end{cases}$$

Tokia funkcijų aibė yra vadinama *interpoliacine*. Interpoliacinės bandomųjų funkcijų sistemos atveju bet kuris Galiorkino metodo artinio koeficientas c_i yra lygus funkcijos $y(x)$ reikšmei taške $x = x_i$, todėl šį artinį žymėsime taip:

$$y(x) = \sum_{i=0}^{N} y_i \, \varphi_i(x) \, .$$

Tačiau interpoliavimo sąlyga dar vienareikšmiškai neapibrėžia bandomųjų funkcijų aibės. Šiame poskyryje papildomai reikalausime, kad funkcijos $\varphi_i(x)$ būtų tiesinės kiekviename intervale $[x_j, \ x_{j+1}]$. Tada gauname *dalimis tiesinių* bandomųjų funkcijų sistemą:

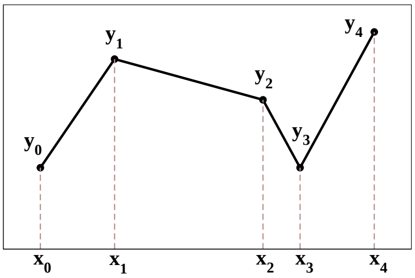
$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x < x_{i-1}, \\ \dfrac{x - x_{i-1}}{h_{i-0,5}}, & \text{kai } x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i, \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h_{i+0,5}}, & \text{kai } x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}, \\ 0, & \text{kai } x > x_{i+1}. \end{cases}$$

Matome, kad funkcija $\varphi_i(x)$ nelygi nuliui tik intervale (x_{i-1}, x_{i+1}), jos grafikas pavaizduotas 2.3 pav.

Artinio $y(x)$ reikšmė bet kuriame elemento $[x_{i-1}, x_i]$ taške apskaičiuojama pagal tokią paprastą formulę:

$$y(x) = y_{i-1}\,\varphi_{i-1}(x) + y_i\,\varphi_i(x)\,.$$

Matome, kad funkcija $y(x)$ yra lokaliai apibrėžta kiekviename atskirame elemente. 2.4 pav. pavaizduotas Galiorkino metodo artinio grafikas, kai naudojame dalimis tiesines bandomąsias funkcijas.



2.4 pav. Dalimis tiesinis Galiorkino metodo artinys

Silpnoji (2.34) kraštinio diferencialinio uždavinio formuluotė. Sudarysime tiesinių lygčių sistemą, iš kurios rasime Galiorkino skleidinio koeficientus. Pirmiausia, pasinaudoję bandomųjų funkcijų interpoliavimo savybe, iš kraštinės sąlygos $u(l) = \mu_1$ gauname lygybę:

$$y_N = \mu_1\,. \tag{2.35}$$

Likusius skleidinio koeficientus y_i rasime išsprendę Galiorkino metodo tiesinių lygčių sistemą:

$$\big(Ly, \varphi_j\big) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, N-1\,.$$

Čia susiduriame su nauja problema: artinys $y(x)$ yra dalimis tiesinė funkcija, todėl negalime apskaičiuoti jo antrosios išvestinės, o kartu ir operatoriaus Ly reikšmės. Todėl pateiksime naują diferencialinio uždavinio formuluotę.

Imkime funkciją $v(x)$, kurios pirmosios išvestinės $L_2[0, l]$ norma yra baigtinė ir kuri tenkina homogeninę kraštinę sąlygą:

$$v(l) = 0\,. \tag{2.36}$$

(2.34) diferencialinę lygtį skaliariškai padauginkime iš $v(x)$. Gausime lygybę:

$$\big(Lu, v\big) = 0\,.$$

Skaičiuodami skaliarinę sandaugą, integruokime dalimis:

$$\int\limits_0^l v(x)\,\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)\,dx = k(x)\frac{du}{dx}\,v(x)\Big|_0^l - \int\limits_0^l k(x)u'(x)v'(x)\,dx\,.$$

Pasinaudoję (2.34) kraštine sąlyga ir (2.36) lygybe, gauname tokią lygtį:

$$\int\limits_0^l k(x)u'v'\,dx + \int\limits_0^l q(x)uv\,dx + (\beta u(0) - \mu_0)v(0) = \int\limits_0^l f(x)v(x)\,dx\,. \qquad (2.37)$$

Taip pat formuluojame kraštinę sąlygą:

$$u(l) = \mu_1\,. \qquad (2.38)$$

Uždavinys (2.37) – (2.38) vadinamas *silpnuoju* kraštiniu diferencialiniu uždaviniu. Funkcija $u(x)$ yra *silpnasis* kraštinio diferencialinio uždavinio sprendinys, jei:

1) visoms funkcijoms $v(x)$, kurioms teisinga (2.36) sąlyga, $u(x)$ tenkina lygtį (2.37);

2) $u(x)$ tenkina (2.38) kraštinę sąlygą.

Taigi kiekvienas (2.34) kraštinio diferencialinio uždavinio sprendinys yra ir silpnojo kraštinio uždavinio sprendinys. Atvirkščias teiginys ne visada yra teisingas, nes silpnajam sprendiniui keliami daug mažesni glodumo reikalavimai – užtenka, kad jo pirmosios išvestinės $L_2[0, l]$ norma būtų aprėžta.

Galiorkino metodo lygties koeficientų skaičiavimas. Vėl nagrinėkime dalimis tiesinių bandomųjų funkcijų φ_j sistemą. Užrašykime Galiorkino metodo tiesinių lygčių sistemą silpnajam diferencialiniam uždaviniui:

$$\int\limits_0^l k(x)y'(x)\varphi_i'(x)\,dx + \int\limits_0^l q(x)y(x)\varphi_i(x)\,dx + \big(\beta y(0) - \mu_0\big)\varphi_i(0)$$
$$= \int\limits_0^l f(x)\varphi_i(x)\,dx, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1\,. \qquad (2.39)$$

Panagrinėkime šios lygčių sistemos i-tąją lygtį, kai $0 < i < N$. Atsižvelgę į funkcijos $\varphi_i(x)$ apibrėžimą, gauname lygtį:

$$a_i y_{i-1} + c_i y_i + b_i y_{i+1} = g_i\,,$$

čia pažymėjome

$$a_i = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} k(x)\varphi'_{i-1}\varphi'_i\,dx + \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)\varphi_{i-1}\varphi_i\,dx\,,$$

$$b_i = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} k(x)\varphi'_{i+1}\varphi'_i\,dx + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} q(x)\varphi_{i+1}\varphi_i\,dx\,,$$

$$c_i = \int\limits_{x_{i-i}}^{x_{i+1}} k(x)\big(\varphi'_i(x)\big)^2\,dx + \int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} q(x)\varphi_i^2(x)\,dx\,,$$

$$g_i = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\varphi_i(x)\,dx\,.$$

Kai nagrinėjame pirmąją lygybę, t. y. $i = 0$, tai iš (2.39) išplaukia tokia tiesinė lygtis:

$$c_0 y_0 + b_0 y_1 = g_0\,,$$

čia pažymėjome:

$$b_0 = \int\limits_0^{x_1} k(x)\varphi'_1\varphi'_0\,dx + \int\limits_0^{x_1} q(x)\varphi_1\varphi_0\,dx\,,$$

$$c_0 = \beta + \int\limits_0^{x_1} k(x)\big(\varphi'_0(x)\big)^2\,dx + \int\limits_0^{x_1} q(x)\varphi_0^2(x)\,dx\,,$$

$$g_i = \mu_0 + \int\limits_0^{x_1} f(x)\varphi_0(x)\,dx\,.$$

Pastebėsime, kad tiesinių lygčių sistemos matrica yra simetrinė, t. y. $a_{i+1} = b_i$. Pridėję ir (2.35) kraštinę sąlygą, gauname tiesinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} c_0 y_0 + b_0 y_1 = g_0\,, \\ b_{i-1} y_{i-1} + c_i y_i + b_i y_{i+1} = g_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-2\,, \\ b_{N-2} y_{N-2} + c_{N-1} y_{N-1} = g_{N-1} - b_{N-1}\mu_1\,. \end{cases} \tag{2.40}$$

Jos koeficientus dažniausiai skaičiuojame naudodami reikiamo tikslumo skaitinio integravimo formules. Dalimis tiesinių bandomųjų funkcijų sistemai galime taikyti vidurinių reikšmių skaitinio integravimo metodą:

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\varphi_i(x)\,dx \approx f_{i-0,5} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x - x_{i-1}}{h_{i-0,5}}\,dx = \frac{1}{2} h_{i-0,5} f_{i-0,5}\,,$$

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\varphi_i(x)\,dx \approx f_{i+0,5} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x_{i+1} - x}{h_{i+0,5}}\,dx = \frac{1}{2} h_{i+0,5} f_{i+0,5}\,,$$

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)\,\varphi_{i-1}(x)\,\varphi_i(x)\,dx \approx q_{i-0,5} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(x_i - x)(x - x_{i-1})}{h_{i-0,5}^2}\,dx = \frac{1}{6} h_{i-0,5} q_{i-0,5}\,,$$

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)\,\varphi_i^2(x)\,dx \approx q_{i-0,5} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(x - x_{i-1})^2}{h_{i-0,5}^2}\,dx = \frac{1}{3} h_{i-0,5} q_{i-0,5}\,,$$

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} k(x)\,\varphi_{i-1}'(x)\,\varphi_i'(x)\;dx = -\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{k(x)}{h_{i-0,5}^2}\,dx \approx -\frac{k_{i-0,5}}{h_{i-0,5}}\,,$$

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} k(x)\,\big(\varphi_i'(x)\big)^2\;dx = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{k(x)}{h_{i-0,5}^2}\,dx \approx \frac{k_{i-0,5}}{h_{i-0,5}}\,.$$

Todėl galime naudoti tokias (2.40) tiesinių lygčių sistemos koeficientų formules:

$$b_i = -\frac{k_{i+0,5}}{h_{i+0,5}} + \frac{1}{6}\, h_{i+0,5}\, q_{i+0,5}\,,$$

$$c_0 = -\frac{k_{0,5}}{h_{0,5}} + \frac{1}{3}\, h_{0,5}\, q_{0,5} + \beta\,,$$

$$c_i = \frac{k_{i-0,5}}{h_{i-0,5}} + \frac{k_{i+0,5}}{h_{i+0,5}} + \frac{1}{3}\left(h_{i-0,5}\, q_{i-0,5} + h_{i+0,5}\, q_{i+0,5}\right),$$

$$g_0 = \mu_0 + \frac{1}{2}\, h_{0,5}\, f_{0,5}\,,$$

$$g_i = \frac{1}{2}\left(h_{i-0,5}\, f_{i-0,5} + h_{i+0,5}\, f_{i+0,5}\right),$$

$$g_{N-1} = \frac{1}{2}\left(h_{N-1,5}\, f_{N-1,5} + h_{N-0,5}\, f_{N-0,5}\right) - b_{N-1}\mu_1\,.$$

Matome, kad tiesinių lygčių sistemos matrica yra diagonaliai vyraujanti, todėl egzistuoja vienintelis jos sprendinys. Šį sprendinį taupiai apskaičiuojame perkelties metodu. Pastebėsime, kad savo struktūra gautoji tiesinių lygčių sistema yra panaši į baigtinių skirtumų schemą. Imkime tolygųjį diskretųjį tinklą ω_h, kai $h_{i-0,5} = h$. Baigtinių elementų schemą (2.40) kompaktiškai užrašome taip:

$$\begin{cases} -\left(k_{i-0,5}\, y_{\bar{x}}\right)_x + \frac{1}{6} q_{i-0,5} y_{i-1} + \frac{1}{3}\left(q_{i-0,5} + q_{i+0,5}\right) y_i \\ \qquad\qquad + \frac{1}{6} q_{i+0,5} y_{i+1} = \frac{1}{2}\left(f_{i-0,5} + f_{i+0,5}\right), \\ -k_{0,5} y_{x,0} + \beta y_0 + \frac{h}{6} q_{0,5}\left(2y_0 + y_1\right) = \mu_0 + \frac{h}{2} f_{0,5}\,, \\ y_N = \mu_1\,. \end{cases}$$