# Modeliavimas ir HPC: fundamentaliosios matematikos uždavinių sprendimas

Raimondas Čiegis

Vilniaus Gedimino technikos universitetas
e-mail: rc@vgtu.lt

Spalio 29 d., 2024, Vilnius

Aptarsime matematinio modeliavimo galimybes pagelbėti sprendžiant fundamentinės matematikos uždavinius.

Čia galime prisiminti kai kurių garsių klasikinių uždavinių sprendinio egzistavimo įrodymus naudojant skaičiavimo eksperimentus ir HPC.

Aptarsime matematinio modeliavimo galimybes pagelbėti sprendžiant fundamentinės matematikos uždavinius.

Čia galime prisiminti kai kurių garsių klasikinių uždavinių sprendinio egzistavimo įrodymus naudojant skaičiavimo eksperimentus ir HPC.

Bet mus domins klausimas, ar matematiko-teoretiko darbo principus galima praturtinti **matematinio ir bendrojo modeliavimo metodika**.

Iš karto aptarkime skirtumus tarp tradicinio modeliavimo ir fundamentinių matematinių tyrimų metodikų.

Iš karto aptarkime skirtumus tarp tradicinio modeliavimo ir fundamentinių matematinių tyrimų metodikų.

Kai modeliuojame sudėtingus fizinius (Gamtos) procesus, siekiame juos aproksimuoti matematiniais modeliais (tai mokslinio/technologinio darbo Esperanto kalba), taip kad galėtume prognozuoti naujus, dar nežinomus efektus.

Galutiniu teisėju yra eksperimentas.

Klausimas, ar mūsų matematinis modelis yra tikslus (arba siekis išmatuoti modelio skirtumą nuo Gamtos) nėra prasmingas. Tiesiog, taip negalime klausti Gamtos ir tikėtis sulaukti atsakymo.

Iš karto aptarkime skirtumus tarp tradicinio modeliavimo ir fundamentinių matematinių tyrimų metodikų.

Kai modeliuojame sudėtingus fizinius (Gamtos) procesus, siekiame juos aproksimuoti matematiniais modeliais (tai mokslinio/technologinio darbo Esperanto kalba), taip kad galėtume prognozuoti naujus, dar nežinomus efektus.

Galutiniu teisėju yra eksperimentas.

Klausimas, ar mūsų matematinis modelis yra tikslus (arba siekis išmatuoti modelio skirtumą nuo Gamtos) nėra prasmingas. Tiesiog, taip negalime klausti Gamtos ir tikėtis sulaukti atsakymo.

Čia labai svarbu pabrėžti, kad mus dominantys procesai Gamtoje egzistuoja nepriklausomai nuo mūsų modelių.

Fundamentaliosios matematikos (kaip ir fizikos, mechanikos, chemijos) uždaviniai yra apibrėžiami – defined.

Tai nėra Gamtos procesai, dėsniai, nors visada stengiamės pamatyti analogijas, kai tik tai galima.

Fundamentaliosios matematikos (kaip ir fizikos, mechanikos, chemijos) uždaviniai yra apibrėžiami – defined.

Tai nėra Gamtos procesai, dėsniai, nors visada stengiamės pamatyti analogijas, kai tik tai galima.

Todėl tokio teorinio tyrimo tikslas yra gauti/įrodyti galutinį atsakymą (šmaikštaujant, galime teigti, kad jis liks teisingas ir Mėnulyje).

Ir visgi, ar taip jau nesuderinami matematiko – teoretiko ir modeliavimo specialistų darbo principai ir metodai?

Ir visgi, ar taip jau nesuderinami matematiko – teoretiko ir modeliavimo specialistų darbo principai ir metodai?

Tvirtinčiau, kad tikslingai sugalvoti ir atlikti didelės apimties skaičiavimo eksperimentai (HPC) yra labai svarbi tokių fundamentaliųjų tyrimų dalis.

Paprasčiausias šio teiginio pagrindimo argumentas – tokia modeliavimo metodika leidžia pamatyti, susieti atskirus faktus ¿ tikėtinas hipotezes, kurios ne tik esmingai skatina naujus tyrimus, bet vėliau netgi virsta labai garsiomis teoremomis.

Ir visgi, ar taip jau nesuderinami matematiko – teoretiko ir modeliavimo specialistų darbo principai ir metodai?

Tvirtinčiau, kad tikslingai sugalvoti ir atlikti didelės apimties skaičiavimo eksperimentai (HPC) yra labai svarbi tokių fundamentaliųjų tyrimų dalis.

Paprasčiausias šio teiginio pagrindimo argumentas – tokia modeliavimo metodika leidžia pamatyti, susieti atskirus faktus į tikėtinas hipotezes, kurios ne tik esmingai skatina naujus tyrimus, bet vėliau netgi virsta labai garsiomis teoremomis.

Prisiminkime Rymano hipotezę, kuri teigia, kad visi netrivialieji Rymano dzeta funkcijos nuliai yra kompleksiniai skaičiai, kurių realioji dalis lygi 1/2.

Natūraliųjų skaičių aibė $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Natūraliųjų skaičių aibė $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

**Apibrėžimas**. Pirminiai skaičiai yra natūralieji skaičiai $n$, kurie turi du daliklius 1 ir $n$.

Pirmininių skaičių aibė $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$.

Natūraliųjų skaičių aibė $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

**Apibrėžimas**. Pirminiai skaičiai yra natūralieji skaičiai *n*, kurie turi du daliklius 1 ir *n*.

Pirmininių skaičių aibė $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$.

Taigi jau turime objektą, kurio savybes norime modeliuoti, suprasti, pažinti ir kai pavyksta, griežtai įrodyti jų teisingumą.

Taigi tokių modelių atvejų galime užduoti klausimą, ar modelis yra tikslus.

1. Kiek yra pirminių skaičių, ar ši aibė yra baigtinė?

1. Kiek yra pirminių skaičių, ar ši aibė yra baigtinė?

Dar Euklido darbuose randame įrodymą, kad egzistuoja be galo daug pirminių skaičių. Įrodyme naudojamas prieštaravimo metodas, kurį kai kurie matematikai laiko Jūsų argumentų ribotumu – kai nerandame kito, įdomesnio įrodymo, tinka ir šis.

1. Kiek yra pirminių skaičių, ar ši aibė yra baigtinė?

Dar Euklido darbuose randame įrodymą, kad egzistuoja be galo daug pirminių skaičių. Įrodyme naudojamas prieštaravimo metodas, kurį kai kurie matematikai laiko Jūsų argumentų ribotumu – kai nerandame kito, įdomesnio įrodymo, tinka ir šis.

O man šis metodas labai patinka...

Visgi neturime kompaktiškos ir konstruktyvios formulės, apibrėžiančios pirminių skaičių seką.

Visgi neturime kompaktiškos ir konstruktyvios formulės, apibrėžiančios pirminių skaičių seką.

Pažymėkime $\pi(n)$ kiekį pirminių skaičių, nedidesnių už $n$.

Aišku, kad tokią seką galime apskaičiuoti kiekvienam fiksuotam $n$.

Taip pat egzistuoja efektyvūs algoritmai, kaip apskaičiuoti $\pi(n)$ net nesuradus išreikštine forma visos sekos.

**Pirminių skaičių teorema apie pirminių skaičių pasiskirstymą.**

Ji tvirtina, kad $\pi(n)$ asimptotiškai galime įvertinti tokia formule

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n}.$$

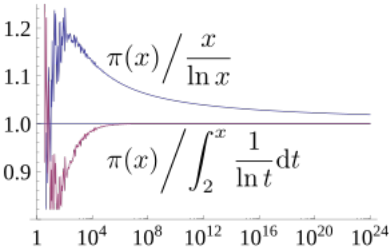
Rymano dzeta funkcija panaudota įrodant šį teiginį.

## Pirminių skaičių teorema apie pirminių skaičių pasiskirstymą.

Ji tvirtina, kad $\pi(n)$ asimptotiškai galime įvertinti tokia formule

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n}.$$

Rymano dzeta funkcija panaudota įrodant šį teiginį.

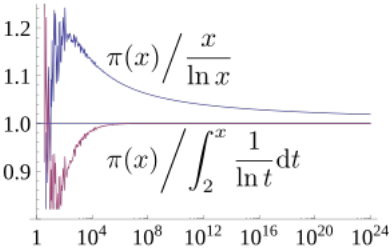


**Pirminių skaičių teorema apie pirminių skaičių pasiskirstymą.**

Ji tvirtina, kad $\pi(n)$ asimptotiškai galime įvertinti tokia formule

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n}.$$

Rymano dzeta funkcija panaudota įrodant šį teiginį.




Taigi tikimybė, kad pakankamai dideliems natūraliesiems $n$ atsitiktinai parinktas skaičius yra pirminis yra labai artima $1/\ln n$.

Seminare aptarsime garsųjį pirminių dvynių uždavinį (kuris neišspręstas iki šiol. Gal po seminaro kam nors kils puikių idėjų, kaip konstruoti įrodymą?)

Seminare aptarsime garsųjį pirminių dvynių uždavinį (kuris neišspręstas iki šiol. Gal po seminaro kam nors kils puikių idėjų, kaip konstruoti įrodymą?)

Pirminių skaičių pora $(l, m)$, $l, m \in \mathbb{P}$ apibrėžia dvynių porą, jei $|l - m| = 2$.

$$(3, 5), \ (5, 7), \ (11, 13), \ (17, 19), \ \dots$$

## Kiek yra pirminių dvynių porų, ar ši aibė yra baigtinė?

Kaip matėme, didėjant $n$ pirminių skaičių tankis vis mažėja, vidutinis atstumas tarp gretimų pirminių skaičių didėja.

## Kiek yra pirminių dvynių porų, ar ši aibė yra baigtinė?

Kaip matėme, didėjant $n$ pirminių skaičių tankis vis mažėja, vidutinis atstumas tarp gretimų pirminių skaičių didėja.

Ar modeliavimas ir HPC gali padėti išspręsti šią klasikinę problemą (t.y. pilnai įrodyti, o ne tik gauti artinį ar sprendinius baigtiniam skaičiui $n$)?

Norėdami "pajausti" dvynių porų pasiskirstymą ir jų dinamiką didėjant $n$, atlikime skaičiavimo eksperimentus (mes gi modeliuojame ...)

| $n$ | $\tilde{\pi}$ | $c$ |
|---|---|---|
| 3000 | 79 | 1.688 |
| 30000 | 465 | 1.647 |
| 300000 | 2992 | 1.586 |
| 3000000 | 20930 | 1.552 |
| 30000000 | 152889 | 1.511 |

Norėdami "pajausti" dvynių porų pasiskirstymą ir jų dinamiką didėjant $n$, atlikime skaičiavimo eksperimentus (mes gi modeliuojame ...)

| $n$ | $\tilde{\pi}$ | $c$ |
|---|---|---|
| 3000 | 79 | 1.688 |
| 30000 | 465 | 1.647 |
| 300000 | 2992 | 1.586 |
| 3000000 | 20930 | 1.552 |
| 30000000 | 152889 | 1.511 |

Kokį dėsnį galite sudaryti, norėdami prognozuoti pirminių dvynių porų skaičių?

$$\tilde{\pi}(n) \sim c\,\frac{n}{(\ln n)^2}, \quad c \approx 1.5.$$

$$\tilde{\pi}(n) \sim c\,\frac{n}{(\ln n)^2}, \quad c \approx 1.5.$$

Visgi, kaip matėme, didėjant $n$ pirminių skaičių tankis vis mažėja, vidutinis atstumas tarp gretimų pirminių skaičių didėja. Iki 2013 metų neturėjome jokių griežtų rezultatų net apie šio skaičiaus baigtinumą.

Pateiktoje statistinėje hipotezėje konstanta $c$ mažėja ir gal netgi artėja į nulį.

Pabandykime sukurti tikėtiną modelį, kuris prognozuotų šį rezultatą.

Pabandykime sukurti tikėtiną modelį, kuris prognozuotų šį rezultatą.

Nagrinėkime langus, kurių ilgis lygus 6 (taip, nes $6 = 2 * 3$) :

$$6k + j, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Pabandykime sukurti tikėtiną modelį, kuris prognozuotų šį rezultatą.

Nagrinėkime langus, kurių ilgis lygus 6 (taip, nes $6 = 2 * 3$) :

$$6k + j, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Nesunku matyti, kad pirminiai skaičiai būtinai lygūs $6k - 1$ arba $6k + 1$.

Pabandykime sukurti tikėtiną modelį, kuris prognozuotų šį rezultatą.

Nagrinėkime langus, kurių ilgis lygus 6 (taip, nes $6 = 2 * 3$) :

$$6k + j, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Nesunku matyti, kad pirminiai skaičiai būtinai lygūs $6k - 1$ arba $6k + 1$.

Tam, kad egzistuotų dvynių poros, būtina (bet tai nėra pakankama sąlyga), kad abiejų grupių atstovų skaičius būtų pakankamas.

Atlikime skaičiavimo eksperimentą ir suskaičiuokime pirminius skaičius, patenkančius į vieną ar kitą grupę.

| $n$ | $6k-1$ | $6k+1$ |
|---|---|---|
| 300000 | 13025 | 12970 |
| 3000000 | 108475 | 108339 |
| 30000000 | 929118 | 928740 |

Atlikime skaičiavimo eksperimentą ir suskaičiuokime pirminius skaičius, patenkančius į vieną ar kitą grupę.

| $n$ | $6k-1$ | $6k+1$ |
|---|---|---|
| 300000 | 13025 | 12970 |
| 3000000 | 108475 | 108339 |
| 30000000 | 929118 | 928740 |

## Modelis (teorinė hipotezė)

$6k-1$ grupėje pirminių yra $\frac{n}{2}/\ln n$.

Atlikime skaičiavimo eksperimentą ir suskaičiuokime pirminius skaičius, patenkančius į vieną ar kitą grupę.

| $n$ | $6k-1$ | $6k+1$ |
|---|---|---|
| 300000 | 13025 | 12970 |
| 3000000 | 108475 | 108339 |
| 30000000 | 929118 | 928740 |

Modelis (teorinė hipotezė)

$6k-1$ grupėje pirminių yra $\frac{n}{2}/\ln n$.

Tikimybė, kad gretimas nelyginis skaičius $6k+1$ irgi yra pirminis

$$\frac{n}{2\ln n} : \frac{n}{6} = \frac{3}{\ln n}.$$

Atlikime skaičiavimo eksperimentą ir suskaičiuokime pirminius skaičius, patenkančius į vieną ar kitą grupę.

| $n$ | $6k-1$ | $6k+1$ |
|---|---|---|
| 300000 | 13025 | 12970 |
| 3000000 | 108475 | 108339 |
| 30000000 | 929118 | 928740 |

## Modelis (teorinė hipotezė)

$6k-1$ grupėje pirminių yra $\frac{n}{2} / \ln n$.

Tikimybė, kad gretimas nelyginis skaičius $6k+1$ irgi yra pirminis

$$\frac{n}{2\ln n} : \frac{n}{6} = \frac{3}{\ln n}.$$

Prognozuojame dvynių pirminių skaičių

$$\frac{n}{2\ln n} \times \frac{3}{\ln n} = \frac{3}{2} \frac{n}{(\ln n)^2}.$$

Pakartokime šiuos tyrimus pasirinkdami langus, kurių ilgis lygus 30 (nes $30 = 2 * 3 * 5$) :

$$30k + j, \quad j = 1, \ldots, 29.$$

Pakartokime šiuos tyrimus pasirinkdami langus, kurių ilgis lygus 30 (nes $30 = 2 * 3 * 5$) :

$$30k + j, \quad j = 1, \ldots, 29.$$

Nesunku matyti, kad pirminiai skaičiai būtinai priklauso vienai iš aštuonių grupių

$30k+1, 30k+7, 30k+11, 30k+13, 30k+17, 30k+19, 30k+23, 30k+29.$

Dvyniai pirminiai yra apibrėžiami viena iš trijų porų

$$(1, 29), \quad (11, 13), \quad (17, 19).$$

| $n$ | $(1,29)$, $NT$ | $(11,13)$, $NT$ | $(17,19)$, $NT$ |
|---|---|---|---|
| 300000 | 3230, 3260, 988 | 3248, 3261, 993 | 3267, 3227, 1011 |
| 3000000 | 27041, 27110, 6951 | 27134, 27111, 6993 | 27112, 27050, 6986 |
| 9000000 | 75251, 75280, 17819 | 75353, 75305, 18053 | 75360, 75287, 17993 |

| $n$ | $(1, 29)$, $NT$ | $(11, 13)$, $NT$ | $(17, 19)$, $NT$ |
|---|---|---|---|
| 300000 | 3230, 3260, 988 | 3248, 3261, 993 | 3267, 3227, 1011 |
| 3000000 | 27041, 27110, 6951 | 27134, 27111, 6993 | 27112, 27050, 6986 |
| 9000000 | 75251, 75280, 17819 | 75353, 75305, 18053 | 75360, 75287, 17993 |

Grupėse $30k + 1$, $30k + 11$ ir $30k + 17$ pirminių yra po $\frac{n}{8} / \ln n$.

| $n$ | $(1,29)$, $NT$ | $(11,13)$, $NT$ | $(17,19)$, $NT$ |
|---|---|---|---|
| 300000 | 3230, 3260, 988 | 3248, 3261, 993 | 3267, 3227, 1011 |
| 3000000 | 27041, 27110, 6951 | 27134, 27111, 6993 | 27112, 27050, 6986 |
| 9000000 | 75251, 75280, 17819 | 75353, 75305, 18053 | 75360, 75287, 1799[illegible] |

Grupėse $30k+1$, $30k+11$ ir $30k+17$ pirminių yra po $\frac{n}{8}/\ln n$.

Tikimybė, kad šių pirminių gretimas nelyginis skaičius irgi yra pirminis

$$\frac{n}{8\ln n} : \frac{n}{30} = \frac{15}{4\ln n}.$$

| $n$ | $(1, 29)$, $NT$ | $(11, 13)$, $NT$ | $(17, 19)$, $NT$ |
|---|---|---|---|
| 300000 | 3230, 3260, 988 | 3248, 3261, 993 | 3267, 3227, 1011 |
| 3000000 | 27041, 27110, 6951 | 27134, 27111, 6993 | 27112, 27050, 6986 |
| 9000000 | 75251, 75280, 17819 | 75353, 75305, 18053 | 75360, 75287, 1799 |

Grupėse $30k + 1$, $30k + 11$ ir $30k + 17$ pirminių yra po $\frac{n}{8} / \ln n$.

Tikimybė, kad šių pirminių gretimas nelyginis skaičius irgi yra pirminis

$$\frac{n}{8 \ln n} : \frac{n}{30} = \frac{15}{4 \ln n}.$$

Prognozuojame dvynių pirminių skaičių

$$3 \times \frac{n}{8 \ln n} \times \frac{15}{4 \ln n} = \frac{45}{32} \frac{n}{(\ln n)^2}.$$

## Ellott-Halberstam hipotezė – conjecture

Tegul $a$ yra natūralaus skaičiaus $q$ tarpusavyje pirminis skaičius.

Pažymėkime $\pi(x; q, a)$ kiekį pirminių skaičių, kurie yra nedidesni už $x$ ir moduliu $q$ jie lygūs $a$.

## Ellott-Halberstam hipotezė – conjecture

Tegul $a$ yra natūralaus skaičiaus $q$ tarpusavyje pirminis skaičius.

Pažymėkime $\pi(x; q, a)$ kiekį pirminių skaičių, kurie yra nedidesni už $x$ ir moduliu $q$ jie lygūs $a$.

Tada teisingas asimptotinis įvertis

$$\pi(x; q, a) \sim \frac{\pi(x)}{\phi(q)},$$

čia $\phi(q)$ yra garsioji Eulerio funkcija, ji parodo, kiek aibėje $\{1, 2, \ldots, q\}$ yra skaičių $a$, tarpusavyje pirminių su $q$:

$$\mathrm{gcd}(a, q) = 1.$$

## Ellott-Halberstam hipotezė – conjecture

Tegul $a$ yra natūralaus skaičiaus $q$ tarpusavyje pirminis skaičius.

Pažymėkime $\pi(x; q, a)$ kiekį pirminių skaičių, kurie yra nedidesni už $x$ ir moduliu $q$ jie lygūs $a$.

Tada teisingas asimptotinis įvertis

$$\pi(x; q, a) \sim \frac{\pi(x)}{\phi(q)},$$

čia $\phi(q)$ yra garsioji Eulerio funkcija, ji parodo, kiek aibėje $\{1, 2, \ldots, q\}$ yra skaičių $a$, tarpusavyje pirminių su $q$:

$$\mathrm{gcd}(a, q) = 1.$$

Pvz. $\phi(30) = \phi(2) * \phi(3) * \phi(5) = 1 * 2 * 4 = 8.$

Keletas įdomių faktų apie pirminių dvynių uždavinį.

Keletas įdomių faktų apie pirminių dvynių uždavinį.

Labai netikėtas ir fundamentalus rezultatas buvo paskelbtas 2013 metais: Yitang Zhang įrodė, kad egzistuoja baigtinio ilgio langas ( $N < 7 \cdot 10^7$) toks, kad galime rasti be galo daug pirminių skaičių porų tarp kurių atstumas yra mažesnis arba lygus $N$.

Keletas įdomių faktų apie pirminių dvynių uždavinį.

Labai netikėtas ir fundamentalus rezultatas buvo paskelbtas 2013 metais: Yitang Zhang įrodė, kad egzistuoja baigtinio ilgio langas ( $N < 7 \cdot 10^7$) toks, kad galime rasti be galo daug pirminių skaičių porų tarp kurių atstumas yra mažesnis arba lygus $N$.

Keli garsiausi skaičių teorijos specialistai sudarė mokslinę grupę ir panaudodami modifikuotą Zhang idėją sumažino langi dydį iki 246.

Keletas įdomių faktų apie pirminių dvynių uždavinį.

Labai netikėtas ir fundamentalus rezultatas buvo paskelbtas 2013 metais: Yitang Zhang įrodė, kad egzistuoja baigtinio ilgio langas ( $N < 7 \cdot 10^7$) toks, kad galime rasti be galo daug pirminių skaičių porų tarp kurių atstumas yra mažesnis arba lygus $N$.

Keli garsiausi skaičių teorijos specialistai sudarė mokslinę grupę ir panaudodami modifikuotą Zhang idėją sumažino langi dydį iki 246.

Tada kita grupė matematikų, panaudodami Ellot-Halberstam hipotezę sumažino langą iki 12 (jeigu ši hipotezė yra teisinga), modifikavus/sustiprinus hipotezę pavyko lango dydį sumažinti iki 6.