Nauji algebriniai metodai Caputo trupmeninės eilės diferencialinių lygčių sprendimui ir analizei

Pirmoji dalis (2025-02-25)

dr. Inga Telksnienė

Vadovas: prof. dr. hab. Raimondas Čiegis

LMT podoktorantūros stažuotė

Matematinio modeliavimo katedra

VILNIUS TECH

Trupmeninės eilės išvestinė: pagrindinė idėja

Trupmeninės eilės išvestinė yra klasikinės išvestinės apibendrinimas, kuomet diferencijavimo eilė gali būti nebūtinai sveikasis skaičius.

Tegul $\mathrm{D}_x^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}$ žymi klasikinį sveikosios eilės $n \in \mathbb{N}_0$ diferencijavimo operatorių.

Tuomet, trupmeninės eilės išvestinė yra operatorius $\widehat{\mathrm{D}}_x$, tenkinantis šias savybes:

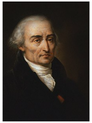
- $\widehat{\mathrm{D}}_x^{(n)} f(x) = \mathrm{D}_x^{(n)} f(x) = \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}$, t.y. trupmeninės ir klasikinės išvestinės sutampa, jeigu diferencijavimo eilė yra sveikasis skaičius.
- $\widehat{\mathrm{D}}_x^{(\alpha)} f(x)$ gali būti apskaičiuota, t.y. šis reiškinys turi matematinę prasmę, kai $\alpha \in \mathbb{R}_+$ nėra sveikasis skaičius.

Įvadas į trupmeninės eilės diferencialinį skaičiavimą (2)

(Guillaume de l'Hôpital, XVII a.)

(Gottfried Wilhelm Leibniz, XVII a.)

(Leonhard Euler, XVIII a.)



(Joseph-Louis Lagrange, XVIII a.)

Kaip apibrėžti $\dfrac{\mathrm{d}^\alpha f(x)}{\mathrm{d}x^\alpha}$, kai α nėra sveikasis skaičius?

daugelis kitų mokslininkų

(Pierre-Simon Laplace, XIX a.)

(Sylvestre Lacroix, XIX a.)

(Joseph Fourier, XIX a.)

(Bernhard Riemann, XIX a.)

Įvadas į trupmeninės eilės diferencialinį skaičiavimą (3)

Populiariausi α-osios eilės trupmeninės išvestinės apibrėžimai ($\alpha \in \mathbb{R}_+$):

Riemann-Liouville (≈1850): $^{RL}\mathrm{D}_x^{(\alpha)} f(x) = \dfrac{1}{\Gamma\left(\lceil\alpha\rceil - \alpha\right)} \dfrac{\mathrm{d}^{\lceil\alpha\rceil}}{\mathrm{d}x^{\lceil\alpha\rceil}} \displaystyle\int_0^x \dfrac{f(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha-\lceil\alpha\rceil+1}} \mathrm{d}\tau;$

Caputo (1967): $^{C}\mathrm{D}_x^{(\alpha)} f(x) = \dfrac{1}{\Gamma\left(\lceil\alpha\rceil - \alpha\right)} \displaystyle\int_0^x \dfrac{f^{(\lceil\alpha\rceil)}(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha-\lceil\alpha\rceil+1}} d\tau;$

Grünwald–Letnikov (1868): $^{GL}\mathrm{D}_x^{(\alpha)} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h^\alpha} \displaystyle\sum_{j=0}^{x/h} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(x - jh).$

Here $\Gamma(\cdot)$ – Gamma funkcija, $\binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{j!\Gamma(\alpha-j+1)}$ – binominis koeficientas.

Nelokalumas

$$ {}^{RL}\mathrm{D}_x^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\lceil\alpha\rceil - \alpha\right)} \frac{\mathrm{d}^{\lceil\alpha\rceil}}{\mathrm{d}x^{\lceil\alpha\rceil}} \int_0^x \frac{f(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha-\lceil\alpha\rceil+1}} \mathrm{d}\tau; $$

$$ {}^{C}\mathrm{D}_x^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\lceil\alpha\rceil - \alpha\right)} \int_0^x \frac{f^{(\lceil\alpha\rceil)}(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha-\lceil\alpha\rceil+1}} d\tau; $$

$$ {}^{GL}\mathrm{D}_x^{(\alpha)} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{x/h} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(x - jh). $$

Šie apibrėžimai pasižymi **nelokalumo** savybe, t. y. priešingai nei klasikinės išvestinės, trupmeninės išvestinės reikšmė taške priklauso ne tik nuo funkcijos reikšmių to taško aplinkoje, bet ir nuo visų praeitų funkcijos reikšmių.

Caputo trupmeninės eilės diferencialinės lygtys

Caputo trupmeninės eilės diferencialinės lygtys (CTDL) yra sėkmingai taikomos:

- Fizikoje (pvz.: anomalios difūzijos modeliavimas);
- Medžiagų moksle (pvz.: ¿vairių medžiagų viskoelastinių savybių modeliavimas);
- Elektros inžinierijoje (pvz.: superkondensatorių modeliavimas ir taikymas elektros energijos kaupimo ¿renginiuose);
- Epidemiologijoje (pvz.: ligų plitimo modeliavimas su atminties efektais);
- Seismologijoje (pvz.: sistemų, atsižvelgiančių ¿ geologinių darinių viskoelastines savybes, modeliavimas);
- ir kitose mokslo srityse.

Caputo trupmeninių laipsninių eilučių algebra

Caputo trupmeninės laipsninės eilutės

Tarkime, kad išvestinės eilė yra $\alpha = \frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$. Tuomet n-tosios eilės trupmeninė laipsninė eilutė apibrėžiama tokiu būdu:

$$\underbrace{f(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \gamma_j x^{\frac{j}{n}} = \sum_{j=0}^{+\infty} v_j w_j^{(n)}}_{\textbf{Trupmeninė laipsninė eilutė}}, \quad \underbrace{w_j^{(n)} = \frac{x^{\frac{j}{n}}}{\Gamma\left(1 + \frac{j}{n}\right)}}_{\textbf{Bazinės funkcijos}}, \quad v_j, \gamma_j \in \mathbb{C}.$$

Caputo algebra

Caputo trupmeninių laipsninių eilučių aibė ${}^{C}\mathbb{F}_n$ su įprastomis sumos, daugybos iš skaliaro ir sandaugos operacijomis sudaro Caputo algebrą virš $\mathbb{C}$: ${}^{C}\mathcal{F}_n = \langle {}^{C}\mathbb{F}_n; +, \cdot | \mathbb{C} \rangle$.

Caputo išvestinė trupmeninėms laipsninėms eilutėms

Caputo išvestinė bazinėms funkcijoms $w_j^{(n)}$

Caputo $\frac{1}{n}$-osios eilės trupmeninė išvestinė bazinėms funkcijoms $w_j^{(n)}$ apibrėžiama tokiu būdu:

$$ {}^{C}\mathrm{D}_x^{\left(\frac{1}{n}\right)} w_j^{(n)} = \begin{cases} 0, & j = 0 \\ w_{j-1}^{(n)}, & j = 1, 2, \ldots \end{cases} $$

Caputo išvestinė trupmeninėms laipsninėms eilutėms

Caputo $\frac{k}{n}$-osios eilės trupmeninė išvestinė funkcijai $f(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} v_j w_j^{(n)}$ apibrėžiama tokiu būdu:

$$ {}^{C}\mathrm{D}_x^{\left(\frac{k}{n}\right)} f(x) = \left({}^{C}\mathrm{D}_x^{\left(\frac{1}{n}\right)} \right)^k f(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} v_{j+k} w_j^{(n)} $$

Caputo išvestinė trupmeninėms laipsninėms eilutėms (2)

Pastebėsime, kad originalus integralinis Caputo trupmeninės išvestinės apibrėžimas

$$ {}^{C}\mathrm{D}_{x}^{\left(\frac{k}{n}\right)} f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\left\lceil \frac{k}{n} \right\rceil - \frac{k}{n}\right)} \int_0^x \frac{f^{\left(\left\lceil \frac{k}{n} \right\rceil\right)}(\tau)}{(x-\tau)^{\frac{k}{n} - \left\lceil \frac{k}{n} \right\rceil + 1}} d\tau $$

ir apibrėžimas, besiremiantis trupmeninių laipsninių eilučių koncepcija

$$ {}^{C}\mathrm{D}_{x}^{\left(\frac{k}{n}\right)} f(x) = {}^{C}\mathrm{D}_{x}^{\left(\frac{k}{n}\right)} \sum_{j=0}^{+\infty} v_j w_j^{(n)} = \sum_{j=0}^{+\infty} v_{j+k} w_j^{(n)} $$

yra ekvivalentūs, jeigu $f(x)$ gali būti išskleista trupmenine laipsnine eilute.

$\left({}^{C}\mathrm{D}_x^{\left(\frac{1}{n}\right)} \right)^n$-tipo Caputo trupmeninės diferencialinės lygtys

Nagrinėkime $\left({}^{C}\mathrm{D}_x^{\left(\frac{1}{n}\right)} \right)^n$-tipo CTDL:

$$\begin{aligned} \left({}^{C}\mathrm{D}_x^{\left(\frac{1}{n}\right)} \right)^n y_n(x) &= F(x, y); \\ \left({}^{C}\mathrm{D}_x^{\left(\frac{1}{n}\right)} \right)^k y_n \Bigg|_{x=0} &= s_k^{(n)};\, k = 0, \ldots, n-1, \end{aligned} \tag{1}$$

čia $F(x, y)$ – analizinė funkcija, $n \in \mathbb{N}$, $y_n = y_n(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \gamma_j x^{\frac{j}{n}} = \sum_{j=0}^{+\infty} v_j w_j^{(n)} \in {}^{C}\mathbb{F}_n$, o parametrai $s_0^{(n)}, s_1^{(n)}, \ldots, s_{n-1}^{(n)} \in \mathbb{C}$ atitinka pradines sąlygas, kai $x = 0$.

Pastaba: aukščiau pateiktos lygties sprendinių aibė yra platesnė nei atitinkamos paprastosios diferencialinės lygties (PDL) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(x, y)$ sprendinių aibė, t.y. $\left({}^{C}\mathbf{D}^{(1/n)} \right)^n \neq \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.

$\left({}^{C}\mathrm{D}_x^{\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^n$-tipo Caputo trupmeninės diferencialinės lygtys (2)

Ankstesniuose tyrimuose buvo įrodyta, kad $\left({}^{C}\mathrm{D}_x^{\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^n$-tipo CTDL yra **ekvivalenti šiai PDL**:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_n(t)}{\mathrm{d}t} = nt^{n-1}F\left(t, \varphi_n(t)\right) + \sum_{j=1}^{n-1} j \frac{s_j^{(n)}}{\Gamma\left(\frac{j}{n}+1\right)} t^{j-1}; \tag{2}$$

$$\varphi_n(0) = y_n\left(0\right) = s_0^{(n)},$$

čia

$$y_n(x) = \varphi_n\left(\sqrt[n]{x}\right). \tag{3}$$

Gautą PDL galima spręsti ir analizuoti naudojant klasikinės analitines ar skaitines technikas.

$\left({}^{C}\mathrm{D}_x^{(\frac{1}{n})} \right)^n$-tipo Caputo trupmeninės diferencialinės lygtys (3)

Pavyzdys. Nagrinėkime Rikati-tipo CTDL:

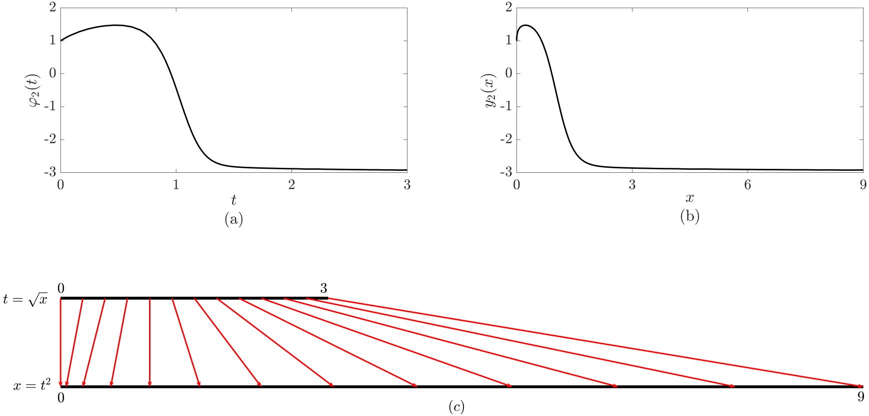
$$\begin{gathered}\left({}^{C}\mathrm{D}_x^{(\frac{1}{2})} \right)^2 y_2 = y_2^2 + y_2 - 6; \\ y_2\left(0\right) = s_0^{(2)}; \quad {}^{C}\mathrm{D}_x^{(\frac{1}{2})} y_2 \bigg|_{x=0} = s_1^{(2)}.\end{gathered} \tag{4}$$

Naudojant aprašytą algoritmą, ši CTDL gali būti suredukuota į PDL:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}t} = 2t\left(\varphi_2^2 + \varphi_2 - 6\right) + \frac{s_1^{(2)}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}; \quad \varphi_2(0) = s_0^{(2)}, \tag{5}$$

čia $y_2(x) = \varphi_2\left(\sqrt{x}\right)$.

$\left({}^{C}\mathrm{D}_x^{(\frac{1}{n})} \right)^n$-tipo Caputo trupmeninės diferencialinės lygtys (4)



Pav.: Rikati-tipo CTDL (b) ir ją atitinkančios PDL (a) sprendiniai, kai $s_0^{(2)} = 1$, $s_1^{(2)} = 2$. Dalyje (c) schematiškai pavaizduota netiesinė kintamojo transformacija $t = \sqrt{x}$.

$\left({}^{C}\mathrm{D}_x^{(\frac{1}{n})}\right)^n$-tipo Caputo trupmeninės diferencialinės lygtys (5)

CTDL sprendiniai pasižymi įdėtąja struktūra: bet kuri $\left({}^{C}\mathrm{D}_x^{(\frac{1}{km})}\right)^{km}$ tipo CTDL ($k, m \in \mathbb{N}$) paveldi sprendinius iš $\left({}^{C}\mathrm{D}_x^{(\frac{1}{k})}\right)^{k}$-tipo ir $\left({}^{C}\mathrm{D}_x^{(\frac{1}{m})}\right)^{m}$-tipo CTDL, kai dalis pradinių sąlygų yra lygios nuliui.

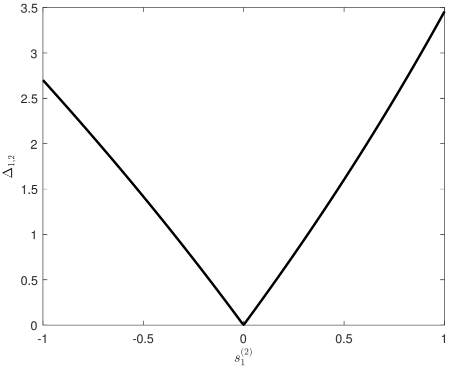
$\left({}^{C}\mathrm{D}_x^{\left(\frac{1}{n}\right)} \right)^n$-tipo Caputo trupmeninės diferencialinės lygtys (6)

Pavyzdys. Nagrinėkime dvi diferencialines lygtis:

$$\begin{cases} \left({}^{C}\mathrm{D}_x^{\left(\frac{1}{2}\right)} \right)^2 y_2 = y_2^2 + y_2 - 6; \\ y_2(0) = s_0^{(2)}; \quad {}^{C}\mathrm{D}_x^{\left(\frac{1}{2}\right)} y_2 \Big|_{x=0} = s_1^{(2)}. \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = y_1^2 + y_1 - 6; \\ y_1(0) = s_0^{(1)}. \end{cases}$$

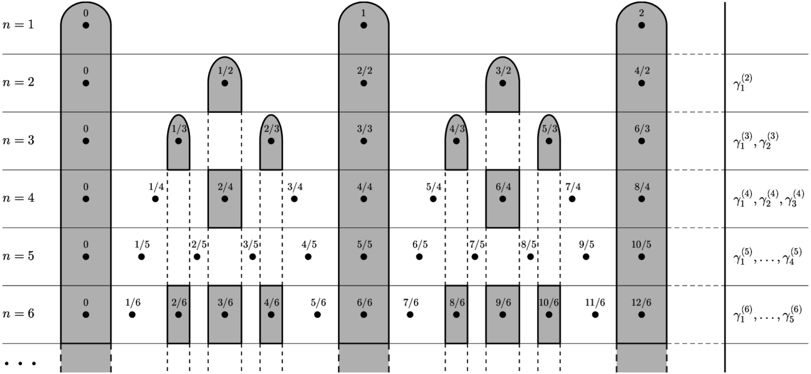
Tegul $s_0^{(1)} = s_0^{(2)} = 0.5$. Taip pat įveskime pažymėjimą $\Delta_{1,2}\left(s_1^{(2)}\right)$, atitinkantį skirtumą tarp y_1 ir y_2 prie tam tikros parametro $s_1^{(2)}$ reikšmės.

$\left({}^{C}\mathrm{D}_x^{\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^n$-tipo Caputo trupmeninės diferencialinės lygtys (7)



Pav.: Funkcijos $\Delta_{1,2}\left(s_1^{(2)}\right)$ (skirtumas tarp y_1 ir y_2 prie tam tikros parametro $s_1^{(2)}$ reikšmės) grafikas. Matome, kad y_2 sutampa su y_1, kai $s_1^{(2)} = 0$.

$\left({}^{C}\mathrm{D}_x^{(\frac{1}{n})}\right)^n$-tipo Caputo trupmeninės diferencialinės lygtys (8)



Pav.: Caputo trupmeninių laipsninių eilučių įdėtoji struktūra. Kiekvienoje eilutėje $n = k$; $k = 1, 2, \dots$ surašyti atitinkamos eilės Caputo trupmeninės laipsninės eilutės x laipsniai. Parametrai $\gamma_v^{(k)}$; $v = 1, 2, \dots, k-1$ dešinėje žymi PDL koeficientus, atitinkančius trupmenines pradines sąlygas. Pilkai nuspalvintos dalys atitinka tuos pačius x laipsnius skirtingų eilių baziniuose elementuose.

Ačiū už dėmes¿!