Tikimybių teorijos paradoksai ir jų taikymas skaitant paskaitas studentams

N. Kosareva

Vilnius TECH

2022 m. vasario 1 d.

Turinys

Dž. Kardano paradoksas

Taisyklingas lošimo kauliukas su vienodomis tikimybėmis iškrenta skaičiais $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Jei metami du lošimo kauliukai, iškritusių akučiu suma yra tarp 2 ir 12. Sumas 9 ir 10 iš skaičių $1, 2, 3, 4, 5, 6$ galima gauti dviem būdais:

$$
\begin{aligned}
9 &= 3+6 = 4+5,\\
10 &= 4+6 = 5+5.
\end{aligned}
$$

Trijų lošimo kauliukų atveju 9 ir 10 gaunami šešiais būdais:

$$
\begin{aligned}
9 &= 1+2+6 = 2+2+5 = 2+3+4\\
&= 3+3+3 = 3+1+5 = 4+1+4,\\
10 &= 1+3+6 = 2+2+6 = 1+5+4\\
&= 2+3+5 = 3+3+4 = 4+4+2.
\end{aligned}
$$

Dž. Kardano paradoksas

Paradoksas

Kodėl 9 iškrenta dažniau, kai metami du kauliukai, o 10 – kai metami trys kauliukai?

Sprendimas

Sprendimas yra gana paprastas, todėl neaišku, kodėl savo laiku uždavinys buvo laikomas labai sudėtingu. Jo negalėjo išspręsti Leibnicas ir Dalamberas. Sprendžiant šį uždavinį svarbu turėti omenyje skaičių iškritimo tvarka, kadangi ne visi nurodyti 9 arba 10 pasirodymo variantai yra vienodai galimi.
Taigi dviejų kauliukų atveju 9 galime gauti ne dviem, bet keturiais būdais, turinčiais tikimybes po $\frac{1}{36}$

$$9 = 3 + 6 = 6 + 3 = 4 + 5 = 5 + 4,$$

o 10 galime gauti trim būdais, turinčiais vienodas tikimybes:

$$10 = 4 + 6 = 6 + 4 = 5 + 5.$$

Sprendimas

Atitinkamos tikimybės sumai 9 yra $\frac{4}{36} \approx 0.1111$, sumai 10 – $\frac{3}{36} \approx 0.0833$. Trijų kauliukų atveju situacija priešinga: 9 galime gauti 25 būdais:

$$6 + 3 + 6 + 1 + 6 + 3 = 25,$$

10 galime gauti 27 būdais:

$$6 + 3 + 6 + 6 + 3 + 3 = 27.$$

Metant tris lošimo kauliukus tikimybė gauti sumoje 9 $\left(\frac{25}{216} \approx 0.1157\right)$. Ji yra mažesnė už tikimybę gauti 10 $\left(\frac{27}{216} \approx 0.125\right)$.

Pastaba

Šis uždavinys tam tikru būdu susijęs su XIX ir XX amžių fizikos kryptimis. Tarkime, kad vietoje lošimo kauliuko turime fizikines daleles. Kiekviena kauliuko sienelė atitinka dalelės fazinę ląstelę, į kurią dalelė patenka atsitiktiniu būdu ir kuri charakterizuoja dalelės būseną. Šiuo atveju kauliuko metimas atitinka Maksvelo-Bolcmano fizikinių dalelių modelį. Šis modelis paprastai aprašo dujų molekulių judėjimą, kai kiekviena dalelė su vienodomis tikimybėmis patenka į bet kurią ląstelę. Taigi šiame modelyje tvarka yra svarbi, kaip ir uždavinyje su kauliukais.

Pastaba

Kitame modelyje laikome, kad dalelės tarpusavyje nesiskiria, ir skaičiuojant vienodai galimus variantus tvarka nėra svarbi. Ši situacija atitinka Bozė-Einšteino modelį. Mūsų paradoksas aprašomas Maksvelo-Bolcmano, bet ne Bozė-Einšteino modelio. Nė vienas iš šių dviejų modelių nėra korektiškas kai galioja Pauli draudimo principas, t.y. vienoje fazinėje būsenoje gali būti tik viena dalelė. T.y., jei viename kauliuke iškrito 6, jokiame kitame kauliuke 6 iškristi jau negalėtų. Toks modelis yra vadinamas Fermi-Dirako modeliu.

De Merė paradoksas

Šį paradoksą lošėjas de Mere pasiūlė išspręsti Paskaliui ir Ferma, kurie nepriklausomai vienas nuo kito gavo tą patį rezultatą.

Paradoksas

Metant vieną lošimo kauliuką 4 kartus tikimybė, kad bent vieną kartą iškris 1-kas yra didesnė už $1/2$. Tuo tarpu, metant 24 kartus du lošimo kauliukus, tikimybė, kad bent vieną kartą iškris du 1-kai yra mažesnė už $1/2$. Tai atrodo gana keistai, nes tikimybė, kad iškris vienas vienetukas $(1/6)$ šešis kartus didesnė už tikimybę, kad iškris du vienetukai $(1/36)$ ir 24 yra šešis kartus didesnis skaičius už 4.

Sprendimas

Tarkime, kad k kartų metame lošimo kauliuką. Tikimybė, kad 1-kas iškris bent vieną kartą, lygi

$$P = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k.$$

Jei $k = 4, P = 0.5177 > 1/2$. Analogiškai gauname tikimybę, kad išmetus k kartų 2 lošimo kauliukus bent vieną kartą iškris du vienetukai:

$$P = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^k.$$

Dydis $P = 0.4914 < 1/2$, kai $k = 24$ ir $P = 0.5055 > 1/2$, kai $k = 25$.

Kritinė reikšmė

Taigi "kritinė reikšmė" vienam kauliukui lygi 4, o dviem kauliukams lygi 25. De Mere nesuprato, kodėl atsakymas, kuris, be abejo yra teisingas, prieštarauja kritinių reikšmių proporcingumo principui: „jei tikimybė sumažėja šešis kartus, tada kritinė reikšmė padidėja šešis kartus" $(4 : 6 = 24 : 36)$. De Muavras 1712 m. parodė, kad jei p yra tam tikro įvykio tikimybė, tai kritinę reikšmę k galima rasti iš lygties

$$(1 - p)^x = 1/2.$$

Kritinė reikšmė k yra mažiausias sveikas skaičius, didesnis už x.

Kritinė reikšmė

Iš čia gauname:

$$x = -\ln 2/\ln(1-p) = \ln 2/(p + p^2/2 + \ldots). \tag{1}$$

Matome, kad, jei p^2 pakankamai mažas, tai kritinė reikšmė atvirkščiai proporcinga p, kaip ir manė de Mere. De Muavras naudojo apytikslę formulę

$$x \approx \ln 2/p \approx 0.69/p$$

skaičiuodamas tikimybes, susijusias su Londono loterija, kai $p = 1/32$.

Kai $p = 1/6$, x reikšmė, apskaičiuota pagal formulę (1) yra 3.8018..., apytikslė reikšmė yra 4.14.
Kai $p = 1/36$, gauname atitinkamai 24.6054... ir 24.84.
Išvada: paradoksas atsiranda dėl to, kad kai $p = 1/6$, dydis $p^2/2$ ir kiti x skaidinio dėmenys nėra tokie maži, kad galėtume juos atmesti. Kritinių reikšmių proporcingumo principas yra asimptotiškai teisingas, t.y., kai tikimybė p pakankamai maža. Kai p nėra labai mažas, negalime ignoruoti narius p^2, p^3 ir pan. formulėje (1).

Prizo padalijimo paradoksas

Paradokso autorius – Luka Pačiolis, uždavinys buvo publikuotas Venecijoje 1494 m. Pačiolis nesiejo šio paradokso su tikimybių teorija, tačiau vėliau būtent su šiuo paradoksu buvo siejama tikimybių teorijos pradžia. Paskalis ir Ferma išsprendė šį uždavinį 1654 m.

Paradoksas

Du lošėjai žaidžia žaidimą, kuriame abiejų šansai išlošti yra lygūs. Jie susitarė, kad pirmasis, laimėjęs 6 partijas pasiima visą prizą. Tarkime, kad žaidimas baigėsi anksčiau, nei bent vienas iš jų laimėjo, pavyzdžiui, pirmas laimėjo 5 partijas, o antras – 3. Kaip reikėtų teisingai padalinti prizą?

Prizo padalijimo paradoksas

Ši problema nėra klasikinis paradoksas, tačiau ji savaime yra įdomi, nes daug dešimtmečių jos niekas negalėjo teisingai išspręsti.
Vienas iš sprendimų: proporcingai išloštų partijų skaičiui, t.y. $5 : 3$.
Kitas variantas yra $2 : 1$. Logika tokia – pirmasis lošėjas išlošė dviem partijomis daugiau, nei antras, tai sudaro trečdalį nuo būtinų laimėti šešių partijų. Taigi pirmasis gauna $1/3$ prizo, o likusi dalis padalinama po lygiai.
Tačiau, iš tikrųjų, teisingas atsakymas yra $7 : 1$.

Sprendimas

Paskalis ir Ferma sprendė šį uždavinį, kaip uždavinį apie tikimybes. Teisingas prizo padalinimas proporcingas kiekvieno lošėjo šansui laimėti prizą. Parodysime, kad, jei pirmam lošėjui iki pergalės trūksta vienos, o antram – trijų partijų, teisingas prizo padalijimas bus $7 : 1$.
Pagal Ferma, pratęskime šį žaidimą trim fiktyviom partijomis, nors gali būti, kad ne visos jos bus reikalingos. Visos $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ baigtys yra vienodai tikėtinos. Antrasis lošėjas laimi esant tik vienai baigčiai, kai jis išlošia visus tris kartus. Visais likusiais 7-ais atvejais iš 8-ių laimi pirmasis lošėjas. Taigi teisinga proporcija yra $7 : 1$.

Sprendimas bendru atveju

Bendrasis sprendimas tuo atveju, kai pirmajam lošėjui prizui gauti trūksta n, o antrajam – m laimėtų partijų, buvo rastas Paskalio ir Ferma. Pirmam lošėjui tikimybė gauti prizą yra

$$\frac{1}{2^{n+m-1}} \sum_{j=n}^{n+m-1} C_{n+m-1}^{j}.$$

Čia fiktyvių partijų skaičius yra $n+m-1$ ir visos 2^{n+m-1} baigčių yra vienodai galimos.

Nepriklausomumo paradoksas

Jaunuolis nori sužaisti tris teniso partijas su savo tėvais ir turi laimėti dvi partijas iš eilės. Galimas partijų eiliškumas: tėvas-mama-tėvas arba mama-tėvas-mama. Tikimybė laimėti prieš mamą q yra didesnė, nei tikimybė laimėti prieš tėvą p, nes tėvas yra stipresnis varžovas. Kuris variantas yra palankesnis jaunuoliui?
Iš pirmo žvilgsnio gali pasirodyti, kad palankesnis antrasis variantas, nes jaunuolis du kartus žaidžia su mama, kuri yra silpnesnė žaidėja. Tačiau, šiuo atveju jis turėtų būtinai laimėti prieš stipresnį tėvą antroje partijoje, kitaip jis neišloš dviejų partijų iš eilės.

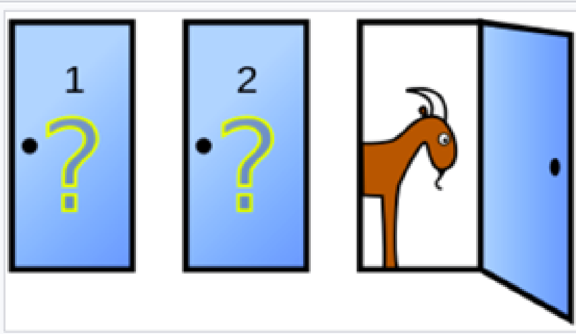
Sprendimas

Pasirinkęs pirmą variantą tėvas-mama-tėvas jaunuolis turėtų laimėti pirmą ir antrą partijas su tikimybę pq arba antrą ir trečią partijas su tikimybę qp (įvykių nepriklausomumas). Tokiu atveju, bent vieno iš šių įvykių tikimybė pagal sumos tikimybės formulę yra $pq + qp - pqp$. Analogiškai, pasirinkęs variantą mama-tėvas-mama jaunuolis dvi partijas iš eilės laimės su tikimybę $qp + pq - qpq$. Tačiau, $pq + qp - pqp > qp + pq - qpq$, nes $q > p$. Taigi palankesnis variantas laimėti dvi partijas iš eilės yra tėvas-mama-tėvas.

Monty Hall'o paradoksas

Įsivaizduokite, kad dalyvaujate žaidime, kuriame turite pasirinkti vieną iš trijų durų. Už vienų durų – automobilis, už kitų dviejų – ožkos. Jūs pasirenkate vienas iš durų, pavyzdžiui, Nr. 1, po to laidos vedėjas, žinantis, kur yra mašina ir kur yra ožkos, atidaro vienas iš likusių durų, pavyzdžiui, Nr. 3, už kurių yra ožka. Po to jis jūsų klausia – ar norėtumėte pakeisti pasirinkimą ir pasirinkti duris Nr. 2? Ar jūsų šansai laimėti automobilį padidės, jei priimsite vedėjo pasiūlymą ir pakeisite savo pasirinkimą?

pav.: Ar verta keisti pasirinkimą?



Monty Hall'o paradoksas

Tam, kad uždavinys būtų suformuluotas korektiškai, teisingos šios prielaidos:

1. automobilis gali būti už bet kurių iš trijų durų su ta pačia tikimybe;

Monty Hall'o paradoksas

Tam, kad uždavinys būtų suformuluotas korektiškai, teisingos šios prielaidos:

1. automobilis gali būti už bet kurių iš trijų durų su ta pačia tikimybe;
2. vedėjas žino, kur yra automobilis;

Monty Hall'o paradoksas

Tam, kad uždavinys būtų suformuluotas korektiškai, teisingos šios prielaidos:

1. automobilis gali būti už bet kurių iš trijų durų su ta pačia tikimybe;
2. vedėjas žino, kur yra automobilis;
3. bet kuriuo atveju vedėjas privalo atidaryti duris su ožka (bet ne tas, kurias žaidėjas pasirinko) ir pasiūlyti žaidėjui pakeisti pasirinkimą;

Monty Hall'o paradoksas

Tam, kad uždavinys būtų suformuluotas korektiškai, teisingos šios prielaidos:

1. automobilis gali būti už bet kurių iš trijų durų su ta pačia tikimybe;
2. vedėjas žino, kur yra automobilis;
3. bet kuriuo atveju vedėjas privalo atidaryti duris su ožka (bet ne tas, kurias žaidėjas pasirinko) ir pasiūlyti žaidėjui pakeisti pasirinkimą;
4. jei vedėjas gali pasirinkti, kurias iš dviejų durų atidaryti (t.y., žaidėjas pasirinko laimingas duris, o už abiejų likusių durų yra ožkos), jis pasirenka bet kurią iš jų su tokia pačia tikimybe.

Monty Hall'o paradoksas

Tam, kad uždavinys būtų suformuluotas korektiškai, teisingos šios prielaidos:

1. automobilis gali būti už bet kurių iš trijų durų su ta pačia tikimybe;
2. vedėjas žino, kur yra automobilis;
3. bet kuriuo atveju vedėjas privalo atidaryti duris su ožka (bet ne tas, kurias žaidėjas pasirinko) ir pasiūlyti žaidėjui pakeisti pasirinkimą;
4. jei vedėjas gali pasirinkti, kurias iš dviejų durų atidaryti (t.y., žaidėjas pasirinko laimingas duris, o už abiejų likusių durų yra ožkos), jis pasirenka bet kurią iš jų su tokia pačia tikimybe.

Paradoksas

Pradžioje žaidimo tikimybė išlošti automobilį yra 1/3. Iš pirmo žvilgsnio atrodo, kad durų pakeitimas nepakeis išlošimo tikimybės. Tačiau, taip nėra. Tikimybė pakeitus duris padvigubėja.

Sprendimas

Jei pakeisite durų pasirinkimą po to, kai vedėjas tai pasiūlys, tada jūs laimėsite, jei iš pradžių pasirinkote pralaimėjusias duris (su tikimybę 2/3) ir pralaimėsite, jei iš pradžių pasirinkote laimingas duris (su tikimybę 1/3).

pav.: Pasirinkimų variantai.

Durys Nr. 1	Durys Nr. 2	Durys Nr. 3	Ar durų pakeitimas leis laimėti?
Automobilis	Ožka	Ožka	Ne
Ožka	Automobilis	Ožka	Taip
Ožka	Ožka	Automobilis	Taip

Sprendimas

Dažnai sprendžiant šią problemą samprotaujama maždaug taip: vedėjas visada pašalina vienas pralaimėjusias duris, o tada tikimybė, kad automobilis atsiras už dviejų neatidarytų durų tampa lygiomis 1/2, nepriklausomai nuo pradinio pasirinkimo. Bet tai netiesa: nors iš tiesų yra dvi pasirinkimo galimybės, šios galimybės, kaip dabar matome, nėra vienodai tikėtinos. Esmė yra tame, kad iš pradžių visos durys turėjo vienodas galimybes laimėti, bet vėliau turėjo skirtingas tikimybes būti pašalintomis.

Trijų kalinių uždavinys

Trys kaliniai, A, B ir C, uždaryti į vienutes ir nuteisti mirties bausme. Gubernatorius atsitiktinai pasirenka vieną iš jų ir jam suteikia malonę. Kalinius saugantis sargybinis žino, kam atleista, bet neturi teisės to pasakyti. Kalinys A prašo sargybinio pasakyti vardą kito kalinio, kuriam tikrai bus įvykdyta mirties bausmė: „Jei kaliniui B bus atleista, pasakyk, kad kaliniui C bausmė bus įvykdyta. Jei C bus atleista, pasakyk, kad B bus įvykdyta. Jei jiems abiem įvykdoma mirties bausmė, ir man atleista, mesk monetą ir pasakyk B arba C vardą."

Paradoksas

Sargybinis pasako kaliniui A, kad kaliniui B bus įvykdyta mirties bausmė. Kalinys A džiaugiasi tai girdėdamas, nes mano, kad dabar jo išgyvenimo tikimybė yra 1/2, o ne 1/3, kaip buvo anksčiau. Kalinys A slapta pasako kaliniui C, kad B bus įvykdyta mirties bausmė. Kalinys C taip pat džiaugiasi tai girdėdamas, nes vis dar tiki, kad kalinio A išgyvenimo tikimybė yra 1/3, o jo išgyvenimo tikimybė padidėjo iki 2/3. Kas iš jų yra teisus?

Sprendimas

Galimi variantai:

1. A atleidžiama ir sargybinis praneša, kad B bus įvykdyta mirties bausmė: $1/3 \times 1/2 = 1/6$ visų atvejų;

Sprendimas

Galimi variantai:

1. A atleidžiama ir sargybinis praneša, kad B bus įvykdyta mirties bausmė: $1/3 \times 1/2 = 1/6$ visų atvejų;
2. A atleidžiama ir sargybinis praneša, kad C bus įvykdyta mirties bausmė: $1/3 \times 1/2 = 1/6$ visų atvejų;

Sprendimas

Galimi variantai:

1. A atleidžiama ir sargybinis praneša, kad B bus įvykdyta mirties bausmė: $1/3 \times 1/2 = 1/6$ visų atvejų;
2. A atleidžiama ir sargybinis praneša, kad C bus įvykdyta mirties bausmė: $1/3 \times 1/2 = 1/6$ visų atvejų;
3. B atleidžiama ir sargybinis praneša, kad C bus įvykdyta mirties bausmė: $1/3$ visų atvejų;

Sprendimas

Galimi variantai:

1. A atleidžiama ir sargybinis praneša, kad B bus įvykdyta mirties bausmė: $1/3 \times 1/2 = 1/6$ visų atvejų;
2. A atleidžiama ir sargybinis praneša, kad C bus įvykdyta mirties bausmė: $1/3 \times 1/2 = 1/6$ visų atvejų;
3. B atleidžiama ir sargybinis praneša, kad C bus įvykdyta mirties bausmė: $1/3$ visų atvejų;
4. C atleidžiama ir sargybinis praneša, kad B bus įvykdyta mirties bausmė: $1/3$ visų atvejų;

Sprendimas

Galimi variantai:

1. A atleidžiama ir sargybinis praneša, kad B bus įvykdyta mirties bausmė: $1/3 \times 1/2 = 1/6$ visų atvejų;
2. A atleidžiama ir sargybinis praneša, kad C bus įvykdyta mirties bausmė: $1/3 \times 1/2 = 1/6$ visų atvejų;
3. B atleidžiama ir sargybinis praneša, kad C bus įvykdyta mirties bausmė: $1/3$ visų atvejų;
4. C atleidžiama ir sargybinis praneša, kad B bus įvykdyta mirties bausmė: $1/3$ visų atvejų;

Sprendimas

Dėl trijų kalinių problemos apribojimų kalinio A klausimas tampa beprasmis, nes jis negauna jokios naujos informacijos prie jau turimos. Yra 100% tikimybė, kad mirties bausmė bus įvykdyta dviem kaliniams. Tai yra, net jei A bus suteikta malonė, jam bus įvardintas bet koks vardas; jei A bus nuteistas mirties bausme, kartu su juo bus įvykdyta mirties bausmė ir kitam kaliniui, kurio vardas bus praneštas kaliniui A.
Tuo tarpu kaliniui C nauja informacija yra labai naudinga, nes jo šansai išgyventi padvigubėja.