VILNIUS TECH
Fundamentinių mokslų fakultetas

Ignas Dapšys

Diskrečiosios schemos paraboliniams uždaviniams su trupmeninio laipsnio elipsiniais operatoriais

2021-10-26

Pristatomas straipsnis

- Čiegis, R.; Čiegis, R.; Dapšys, I. A Comparison of Discrete Schemes for Numerical Solution of Parabolic Problems with Fractional Power Elliptic Operators. Mathematics **2021**, 9, 1344. DOI: 10.3390/math9121344.

Pristatymo turinys

- Įvadas
- Uždavinio formuluotė
- Parabolinių uždavinių su trupmeninio laipsnio elipsiniais operatoriais aproksimacijos
- Trupmeninio laipsnio elipsinių operatorių diskrečiosios schemos
- Išvados

Įvadas

- Lygtys su trupmeninio laipsnio elipsiniais operatoriais naudojamos modeliuojant anomalią difuziją.
- Tai gali būti difuzija, kuriai negalioja Ficko dėsnis arba turinti atminties efektą.
- Trupmeninio laipsnio operatoriai plačiai naudojami, nes jie geriau apibūdina sąveikas dideliais atstumais ir paveldimas medžiagų savybes.
- Galimi taikymai biologijoje, aplinkosaugoje, fizikoje, medicinoje ir panašiai.

Uždavinio formuluotė

- Trupmeninio laipsnio elipsinius operatorius galima apibrėžti įvairiais būdais.
- Straipsnyje naudojame spektrinę formuluotę.

Uždavinio formuluotė

VILNIUS TECH

- Jei turime elipsinį operatorių, jį diskretizuojame ir sprendžiame tikrinių reikšmių uždavinį:

$$A_h \Phi_j = \lambda_j \Phi_j, \quad j = 1, \ldots, J$$

- Elipsiniams operatoriams, tikrinės reikšmės yra realios ir teigiamos. Operatoriaus trupmeninį laipsnį užrašome taip:

$$A_h^{\alpha} U = - \sum_{j=1}^{J} \lambda_j^{\alpha} (U, \Phi_j) \Phi_j$$

- Trupmeninis operatorius taip pat simetrinis ir teigiamai apibrėžtas.

Uždavinio formuluotė

VILNIUS TECH

- Straipsnyje nagrinėjamas toks parabolinis uždavinys:

$$\frac{dU}{dt} + A_h^\alpha U = F(t), \quad 0 < t \leqslant T,$$

$$U(0) = U_0, \quad U_0 \in V_h.$$

Parabolinių uždavinių su trupmeninio laipsnio elipsiniais operatoriais aproksimacijos

- Apibrėžiame netolygų diskretųjį laiko tinklą:

$$\omega_t = \{t^n : \; t^n = t^{n-1} + \tau_{n-1}, \;\; n = 0, \dots, N, \;\; t_0 = 0, \; t_N = T\}$$

- Ir operatorių:

$$U^{n+\sigma} = \sigma U^{n+1} + (1-\sigma)U^n, \quad 0 \leqslant \sigma \leqslant 1$$

- Nagrinėkime neišreikštinę schemą:

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\tau_n} + A_h^\alpha U^{n+\sigma} = F(t^{n+\sigma}), \quad n = 0, \dots, N-1,$$
$$U^0 = U_0, \quad U_0 \in V_h.$$

Parabolinių uždavinių su trupmeninio laipsnio elipsiniais operatoriais aproksimacijos

- Diskrečiąją schemą pertvarkome:

(1) $$\frac{U^{n+\sigma} - U^n}{\sigma\tau_n} + A_h^\alpha U^{n+\sigma} = F(t^{n+\sigma})$$

(2) $$(I + \sigma\tau_n A_h^\alpha) U^{n+\sigma} = U^n + \sigma\tau_n F(t^{n+\sigma})$$

- Aproksimuojame nelokalųjį operatorių $(I + \sigma\tau_n A_h^\alpha)^{-1}$, tiesiniu, lokaliuoju operatoriumi B_h :

$$(I + \sigma\tau_n A_h^\alpha)^{-1} \approx B_h$$

- Tada galime apskaičiuoti sprendinį: $\widetilde{U}^{n+\sigma} = B_h(\widetilde{U}^n + \sigma\tau_n F(t^{n+\sigma}))$

Trupmeninio laipsnio elipsinių operatorių diskrečiosios schemos

- Naudojantis spektrine operatoriaus forma, lygtis galime spręsti Furjė metodu, tačiau jis tinka tik stačiakampėms sritims, ir kai žinomos tikrinės funkcijos.
- Aptarsime tris alternatyvas nelokalaus operatoriaus aproksimavimui:
  – AAA algoritmas.
  – Išplėtimo metodas.
  – Skaidymo metodas.

AAA algoritmas

- Nagrinėkime funkciją:

$$f(z) = \frac{1}{1+\sigma\tau_n z^{\alpha}}, \quad z > 0$$

- Ją aproksimuojame tokiu pavidalu:

$$r_m(z) = \frac{N_m(z)}{D_m(z)} = c_0 + \sum_{j=1}^{m} \frac{c_j}{z - d_j}$$

- Turėdami koeficientų reikšmes, galime rasti lygties sprendinį:

$$\widetilde{U}^{n+\sigma} = \left(c_0 I + \sum_{j=1}^{m} c_j (A_h - d_j I)^{-1}\right) \left(\widetilde{U}^n + \tau_n F(t^{n+\sigma})\right)$$

AAA algoritmas

- Aproksimacijos koeficientų skaičiavimas yra jautrus apvalinimo paklaidoms.
- Siekiant to išvengti, naudojame AAA algoritmą [1].
- Imame realiųjų skaičių aibę $Z = \{z_1, \ldots, z_M\}$.
- AAA algoritmas naudoja baricentrinę racionaliosios funkcijos formą:

$$r_{m-1}(z) = \sum_{j=1}^{m} \frac{w_j f_j}{z - z_j} \Big/ \sum_{j=1}^{m} \frac{w_j}{z - z_j}$$

AAA algoritmas

1. Parenkame atramos tašką naudodami godžiąją paiešką.
2. Minimizuojame aproksimavimo paklaidą likusių atramos taškų aibėje, keisdami svorius $w_1, \ldots, w_m$:

$$\min \|fD_{m-1} - N_{m-1}\|_{Z^{(m)}}, \quad \|w\|_m = 1$$

3. Parenkame kitą atramos tašką taip, kad netiesinė liekana $|f(z) - r_{m-1}(z)|$ būtų didžiausia. Vykdymą sustabdome, jei netiesinė liekana pakankamai maža.

AAA algoritmas

- Stabilumas garantuotas, jei galioja sąlyga:

$$\max_{z_L \leqslant z \leqslant z_R} \frac{1}{\sigma}\left|r_m(z) - (1-\sigma)\right| \leqslant 1$$

- z_L, z_R – apibrėžti operatoriaus A_h tikrinėmis reikšmėmis.
- Sąlyga tenkinama tokioms parametrų reikšmėms:

$$\alpha = 0.25, 0.5, 0.75,\ \tau = 10^{-k}, k = 1, \ldots, 4, \sigma = 0.5$$

Išplėtimo algoritmas

- Pradinį uždavinį išplečiame, įvesdami papildomą kintamąjį y [2]. Sprendinys bus $\widehat{U}^{n+\sigma}(x,y),\ x\in\Omega,\ y\in(0,Y)$.

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(y^s\frac{\partial\widehat{U}^{n+\sigma}}{\partial y}\right)+y^sA_h\widehat{U}^{n+\sigma}=0,\quad x\in\Omega,\ \ y\in(0,Y),\ s=1-2\alpha$$

$$-\lim_{y\to 0}y^s\frac{\partial\widehat{U}^{n+\sigma}}{\partial y}=d_\alpha\left(F(t^{n+\sigma})-\frac{1}{\sigma\tau}(\widehat{U}^{n+\sigma}\big|_{y=0}-U^n)\right),\quad x\in\Omega,$$

$$\widehat{U}^{n+\sigma}=0,\quad (x,y)\in(\partial\Omega\times(0,Y))\cup(\Omega\times\{y=Y\}),$$

$$d_\alpha=2^{1-2\alpha}\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha)}.$$

Išplėtimo algoritmas

VILNIUS TECH

- Apibrėžiame diskretųjį tinklą: $y_j = Y\left(\frac{j}{m}\right)^{\gamma}, \quad j = 0, \ldots, m$
- Naudodamiesi baigtinių tūrių metodu, gauname diskrečiąją schemą išplėstam uždaviniui.

$$J_{j+1/2}(\widehat{U}^{n+\sigma}) - J_{j-1/2}(\widehat{U}^{n+\sigma}) + \widetilde{y}_j^s \left(A_h \widehat{U}^{n+\sigma}\right)_j = 0, \quad x \in \Omega, \ \ j = 1, \ldots, m-1,$$

$$J_{1/2}(\widehat{U}^{n+\sigma}) = d_\alpha \left(F(t^{n+\sigma}) - \frac{1}{\sigma\tau}(\widehat{U}_0^{n+\sigma} - \widetilde{U}^n)\right), \quad x \in \Omega,$$

$$\widehat{U}_m^{n+\sigma} = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$J_{j+1/2}(\widehat{U}^{n+\sigma}) = -y_{j+1/2}^s \frac{\widehat{U}_{j+1}^{n+\sigma} - \widehat{U}_j^{n+\sigma}}{y_{j+1} - y_j}, \quad \widetilde{y}_j^s = \frac{y_{j+1/2}^{s+1} - y_{j-1/2}^{s+1}}{s+1}, \ \ y_{-1/2}^{s+1} = 0.$$

Išplėtimo algoritmas

- Lygčių sistemą sprendžiame tikrinio išskaidymo metodu. Sprendinys bus:

$$\widetilde{U}^{n+\sigma}(x) = \widehat{U}^{n+\sigma}(x,0) = \sum_{l=0}^{m-1} \Psi_{l0}^2 d_\alpha (\mu_l I + A_h)^{-1} \left(F(t^{n+\sigma}) + \frac{1}{\sigma \tau_n} \widetilde{U}^n \right), \quad x \in \Omega.$$

- Sprendinio koeficientai gaunami išsprendus lygčių sistemą:

$$(\mu_l I + A_h) W_l^{n+\sigma} = \Psi_{l0} d_\alpha \left(F(t^{n+\sigma}) + \frac{1}{\sigma \tau_n} \widetilde{U}^n \right), \quad l = 0, \dots, m-1.$$

Išplėtimo algoritmas

- Stabilumo sąlyga analogiška AAA atvejui:

$$\max_{z_L \leqslant z \leqslant z_R} \frac{1}{\sigma} \left| \frac{1}{\sigma\tau} R_m(z) - (1-\sigma) \right| \leqslant 1$$

$$R_m(z) = d_\alpha \sum_{l=0}^{m-1} \Psi_{l0}^2 \frac{1}{\mu_l + z}$$

Skaidymo algoritmas

- Pradinę diskretizuotą lygtį užrašome taip [3].

$$\frac{U^{n+1}-U^n}{\tau_n} + A_h^{-\beta} A_h\left(\sigma U^{n+1} + (1-\sigma)U^n\right) = F(t^{n+\sigma}),\ \beta = 1-\alpha$$

- AAA metodu sukonstruojame racionaliąją aproksimaciją.

$$A_h^{-\beta} \approx R_m(\beta) = c_0 I + \sum_{j=1}^{m} c_j (A_h - d_j I)^{-1}.$$

Skaidymo algoritmas

- Gauname tokią diskrečiąją schemą.

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\tau_n} + \sum_{j=0}^{m} B_{h,j}^{-1} A_h \left(\sigma U^{n+1} + (1-\sigma) U^n\right) = F(t^{n+\sigma}).$$

- Gautą diskrečiąją schemą galime spręsti klasikiniu skaidymo metodu.

$$\frac{\widetilde{U}^{n,j} - \widetilde{U}^{n,j-1}}{\tau_n} + B_{h,j}^{-1} A_h \left(\sigma \widetilde{U}^{n,j} + (1-\sigma) \widetilde{U}^{n,j-1}\right) = \frac{1}{m+1} F(t^{n+\sigma}), \ j = 0, \ldots, m$$

Skaidymo algoritmas

VILNIUS TECH

Algoritmo žingsniai:

1. $\widetilde{U}^{n,-1} = U^n$
2. $(D_j + \sigma\tau_n c_j A_h)\widetilde{U}^{n,j} = (D_j - \sigma\tau_n c_j A_h)\widetilde{U}^{n,j-1} + \dfrac{\tau_n}{m+1} D_j F, \quad j = 0, \ldots, m$
3. $\widetilde{U}^{n+1} = \widetilde{U}^{n,m}$

$$D_0 = I, \quad D_j = A_h - d_j I, \quad j = 1, \ldots, m$$

- Schema nesąlygiškai stabili, jei $\sigma \geqslant 0.5$.

Skaidymo algoritmas

- Aptarsime modifikaciją lygtims su šaltiniu. Užrašome sprendinį taip:

$$U^k = V^k + W^{n+\sigma}, \quad k = n, n+1$$

- Dėmenys gaunami išsprendus lygtis:

(1) $A_h^{\alpha} W^{n+\sigma} = F(t^{n+\sigma}), \quad x \in \Omega$; (2) $\dfrac{V^{n+\sigma} - V^n}{\sigma \tau_n} + A_h^{-\beta} A_h V^{n+\sigma} = 0.$

- Pirmajai lygčiai taikome AAA metodą. Antrą lygtį sprendžiame skaidymo metodu.
- Turime spręsti dvi nelokaliąsias lygtis. Jei šaltinis stacionarus, užtenka spręsti tik vieną (1).

Išvados

- Spektrinė formuluotė leidžia lygtis su trupmeninio laipsnio elipsiniais operatoriais spręsti Furjė metodu.
- Tai galime padaryti tik stačiakampėse srityse ir žinodami tikrines funkcijas.
- Naudojami racionaliąją aproksimacija grįsti metodai.
- Aproksimacijos procesas jautrus apvalinimo paklaidoms, todėl tam reikalingi specialūs metodai.

Literatūra

Pristatomas straipsnis

- Čiegis, R.; Čiegis, R.; Dapšys, I. A Comparison of Discrete Schemes for Numerical Solution of Parabolic Problems with Fractional Power Elliptic Operators. Mathematics **2021**, 9, 1344. DOI: 10.3390/math9121344.

Nuorodos

1. Nakatsukasa, Y.; Sete, O.; Trefethen, L.N. The AAA algorithm for rational approximation. *SIAM J. Sci. Comput.* **2018**, *40*, A1494–A1522.
2. Nochetto, R.H.; Otarola, E.; Salgado, A.J. A PDE approach to fractional diffusion in general domains: A priori error analysis. *Found. Comput. Math.* **2015**, *15*, 733–791.
3. Vabishchevich, P.N. Splitting schemes for non-stationary problems with a rational approximation for fractional powers of the operator. *Appl. Numer. Math.* **2021**, *165*, 414–430.

Ačiū už dėmesį