

Ignas Dapšys

Diskrečiosios schemos paraboliniams uždaviniams su trupmeninio laipsnio elipsiniais operatoriais

Pristatomas straipsnis

- Čiegis, R.; Čiegis, R.; Dapšys, I. A Comparison of Discrete Schemes for Numerical Solution of Parabolic Problems with Fractional Power Elliptic Operators. *Mathematics* **2021**, 9, 1344. DOI: 10.3390/math9121344.

Pristatymo turinys

- Įvadas
- Aptarti metodai
- Skaitiniai eksperimentai
- Trupmeninio laipsnio elipsinių operatorių taikymas reakcijos-difuzijos lygtims
- Išvados

- Lygtys su trupmeninio laipsnio elipsiniais operatoriais plačiai aptinkamos įvairiose srityse.
- Tokie operatoriai apibrėžiami naudojantis spektrine formuluote. Tai leidžia lygtis spręsti Furjė metodu.
- Metodas tinka tik stačiakampėms sritims ir tik tada, kai tikrines funkcijas yra žinomos.
- Todėl naudojami racionaliaja aproksimacija grįsti metodai.

- AAA metodas naudoja baricentrinę racionaliosios funkcijos formą ir godžiają paiešką operatoriaus aproksimacijai rasti.
- Išplėtimo algoritmas įveda papildomą kintamąjį ir sprendžia lygtį su įprastu elipsiniu operatoriumi. Lygtis sprendžiama naudojant netolygų tinklą, baigtinių tūrių ir tikrinio išskaidymo metodais.
- Skaidymo algoritmas skaido operatorių į neigiamo laipsnio ir paprastą elipsinį operatorius. Tai leidžia gauti tikslesnę aproksimaciją. Toliau naudojama klasikinė skaidymo schema.

- Straipsnyje nagrinėjamas toks parabolinis uždavinys:

$$\frac{dU}{dt} + A_h^\alpha U = F(t), \quad 0 < t \leq T,$$

$$U(0) = U_0, \quad U_0 \in V_h.$$

- Spręstas vienmatis testinis uždavinys

$$A_h U = -\frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{h^2}, \quad x_j = jh, \quad j = 1, \dots, J-1, \quad x_J = 1,$$

$$F_j(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq x_j \leq 0.5, \\ 1, & 0.5 < x_j \leq 1. \end{cases}$$

- Racionaliaja aproksimacija paremtų metodų tikslumas priklauso tik nuo diskretizuoto uždavinio spektro.

- Paklaida apibrėžiama kaip tolygioji norma.

$$e_C(N, J) = \max_{(x_j, t^n) \in \bar{\omega}_h \times \omega_t} |U(x_j, t^n) - \tilde{U}_j^n|,$$

- Erdvinis tinklas apibrėžiamas taip.

$$\bar{\omega}_h = \{x_j : x_j = jh, \quad j = 0, \dots, J\}$$

- Tikslusis sprendinys $U(x_j, t^n)$ skaičiuotas FFT metodu.

- Uždavinio parametrai:
 - Erdvės taškų skaičius $J = 256$.
 - $T = 0.6$, kai $\alpha = 0.5$; $T = 0.8$, kai $\alpha = 0.25$.
- AAA metodo parametrai:
 - Atramos taškų skaičius $M = 25,000$ intervale $[\lambda_{hmin}, \lambda_{hmax}]$.
- Išplėtimo metodo parametrai:
 - Cilindro aukštis $Y = 3$.
 - Tinklo adaptavimo laipsniai $\gamma = 5$ ir $\gamma = 12$.

Skaitiniai eksperimentai

Eksperimento rezultatų lentelė AAA algoritmui

τ	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 10$
		$\alpha = 0.5$	$T = 0.6$	
0.01	2.84×10^{-3}	1.004×10^{-4}	7.207×10^{-4}	7.208×10^{-4}
0.005	4.980×10^{-3}	2.641×10^{-4}	2.642×10^{-4}	2.642×10^{-4}
0.0025	6.863×10^{-3}	1.109×10^{-4}	1.740×10^{-4}	6.755×10^{-5}
		$\alpha = 0.25$	$T = 0.8$	
0.01	1.201×10^{-3}	9.488×10^{-5}	5.105×10^{-5}	5.151×10^{-5}
0.005	1.374×10^{-3}	1.399×10^{-4}	1.440×10^{-5}	1.284×10^{-5}
0.0025	1.421×10^{-3}	1.577×10^{-4}	1.556×10^{-5}	3.210×10^{-6}

Skaitiniai eksperimentai

Eksperimento rezultatų lentelė išplėtimo algoritmui

τ	$m = 5$	$m = 10$	$m = 15$	$m = 20$
	$\alpha = 0.5$	$T = 0.6$	$\gamma = 5$	
0.01	2.468×10^{-3}	6.945×10^{-4}	7.210×10^{-4}	7.208×10^{-4}
0.005	2.464×10^{-3}	2.482×10^{-4}	2.643×10^{-4}	2.642×10^{-4}
0.0025	2.463×10^{-3}	5.991×10^{-5}	6.760×10^{-5}	6.756×10^{-5}
	$m = 20$	$m = 40$	$m = 80$	$m = 160$
	$\alpha = 0.25$	$T = 0.8$	$\gamma = 12$	
0.01	2.999×10^{-3}	7.230×10^{-4}	1.846×10^{-4}	5.954×10^{-5}
0.005	2.894×10^{-3}	7.190×10^{-4}	1.805×10^{-4}	4.522×10^{-5}
0.0025	2.894×10^{-3}	7.179×10^{-4}	1.795×10^{-4}	3.976×10^{-6}

Skaitiniai eksperimentai

Eksperimento rezultatų lentelė skaidymo algoritmui

τ	$m = 6$	$m = 10$	$m = 15$
	$\alpha = 0.5$	$T = 0.6$	
0.01	3.746×10^{-5}	9.103×10^{-6}	4.760×10^{-6}
0.005	1.993×10^{-5}	7.559×10^{-6}	4.079×10^{-6}
0.0025	5.870×10^{-6}	2.660×10^{-6}	1.465×10^{-6}
Stat.	4.586×10^{-6}	6.187×10^{-8}	1.149×10^{-11}
	$m = 6$	$m = 10$	$m = 15$
	$\alpha = 0.25$	$T = 0.8$	
0.01	2.637×10^{-5}	1.103×10^{-6}	8.124×10^{-7}
0.005	2.637×10^{-5}	2.762×10^{-7}	2.072×10^{-7}
0.0025	2.517×10^{-5}	8.281×10^{-8}	5.599×10^{-8}
Stat.	2.428×10^{-5}	2.520×10^{-8}	8.445×10^{-9}

Trupmeninio laipsnio elipsinių operatorių taikymas reakcijos-difuzijos lygtims

- Sprendžiamas diferencialinis uždavinys

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -k \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^\alpha u + G(u), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T],$$

$$u(a, t) = f(t), \quad u(b, t) = g(t), \quad t \in [0, T],$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega,$$

- Tai yra netiesinė lygtis su nehomogeninėmis kraštinėmis sąlygomis.

Trupmeninio laipsnio elipsinių operatorių taikymas reakcijos-difuzijos lygtims

- Uždavinį sprendžiame tokia diskrečiąja schema [1]:

$$\frac{U^{n+\sigma} - U^n}{\sigma \tau_n} + kA_h^\alpha U^{n+\sigma} = kA_h^{-\beta} \left(\frac{1}{h^2} E_1 f^{n+\sigma} + \frac{1}{h^2} E_{J-1} g^{n+\sigma} \right) + G(U^{n+\sigma}),$$

$$n = 0, \dots, N - 1,$$

$$U^0 = U_0, \quad U_0 \in V_h.$$

- Schema linearizuojame prediktoriaus-korektoriaus metodu:

$$\frac{U^{n+\sigma,l} - U^n}{\sigma \tau_n} + kA_h^\alpha U^{n+\sigma,l} = kA_h^{-\beta} \left(\frac{1}{h^2} E_1 f^{n+\sigma} + \frac{1}{h^2} E_{J-1} g^{n+\sigma} \right) + G(U^{n+\sigma,l-1}), l = 1, 2,$$

$$U^{n+\sigma} = U^{n+\sigma,2}, \quad U^{n+\sigma,0} = U^n.$$

Trupmeninio laipsnio elipsinių operatorių taikymas reakcijos-difuzijos lygtims

- Efektyvesnė schema [2]:

$$\frac{U^{n+1/3,l} - U^n}{\tau_n/2} = G\left(\frac{U^{n+1/3,l-1} + U^n}{2}\right), \quad l = 1, 2, \quad U^{n+1/3,0} = U^n,$$

$$A_h W^{n+1/2} = \frac{1}{h^2} E_1 f^{n+1/2} + \frac{1}{h^2} E_{J-1} g^{n+1/2},$$

$$V^{n+1/3,2} = U^{n+1/3,2} - W^{n+1/2},$$

$$\frac{V^{n+2/3} - V^{n+1/3,2}}{\tau_n} + k A_h^\alpha \frac{V^{n+2/3} + V^{n+1/3,2}}{2} = 0,$$

$$U^{n+2/3} = V^{n+2/3} + W^{n+1/2},$$

$$\frac{U^{n+1,l} - U^{n+2/3}}{\tau_n/2} = G\left(\frac{U^{n+1,l-1} + U^{n+2/3}}{2}\right), \quad l = 1, 2, \quad U^{n+1,0} = U^{n+2/3}$$

Trupmeninio laipsnio elipsinių operatorių taikymas reakcijos-difuzijos lygtims

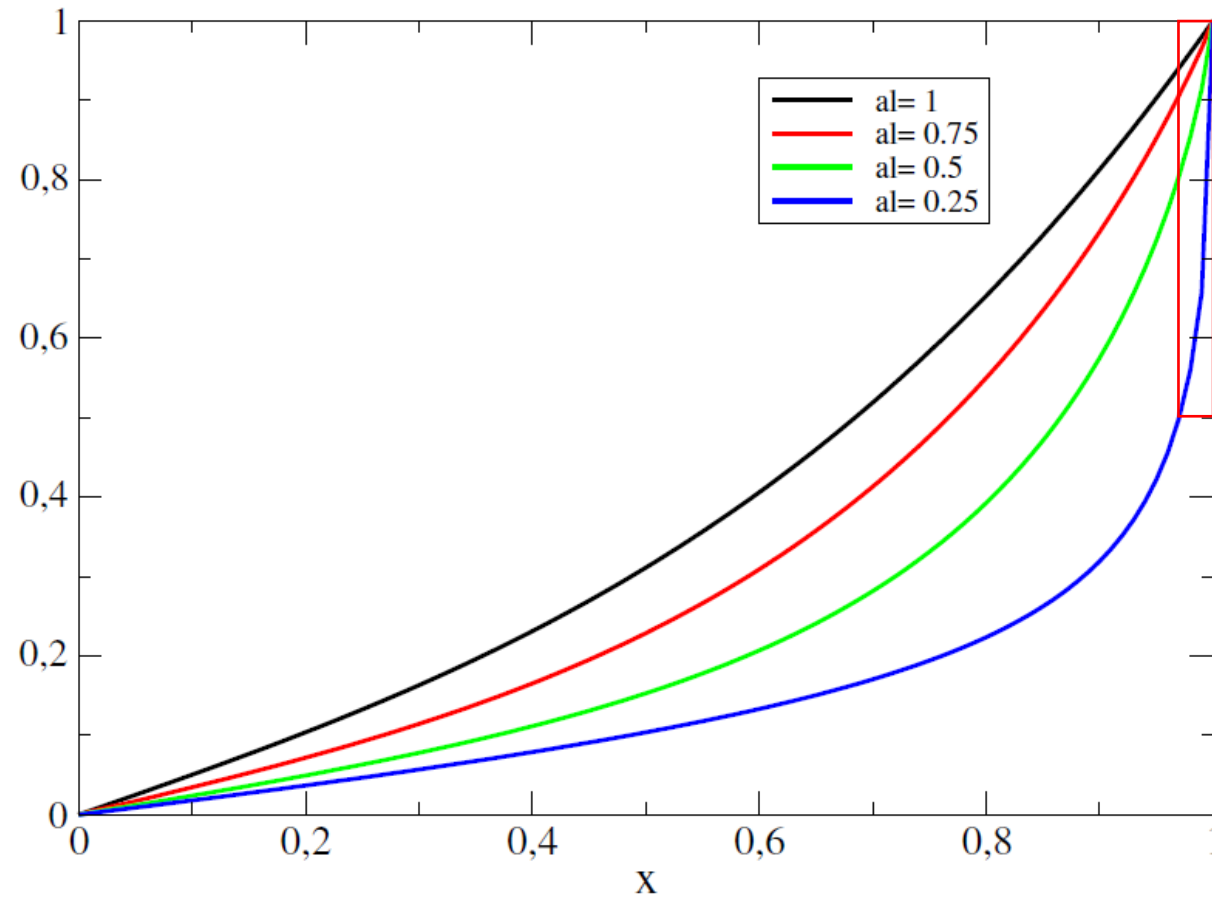
- Sprendžiame reakcijos-difuzijos lygtį:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -k \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^\alpha u - \frac{Vu}{K_M + u}, & (x, t) \in \Omega \times (0, T], \\ u(0, t) &= 0, \quad u(b, t) = g(t), & t \in [0, T], \\ u(x, 0) &= 0, \quad x \in [0, b],\end{aligned}$$

- Naudojamos tokios parametrų reikšmės:

$$g(t) = 100 \mu M, \quad k = 200 \mu m^2 / s, \quad V = 2 \mu M / s, \quad K_M = 100 \mu M, \quad b = 250 \mu m$$

Trupmeninio laipsnio elipsinių operatorių taikymas reakcijos-difuzijos lygtims



Trupmeninio laipsnio elipsinių operatorių taikymas reakcijos-difuzijos lygtims

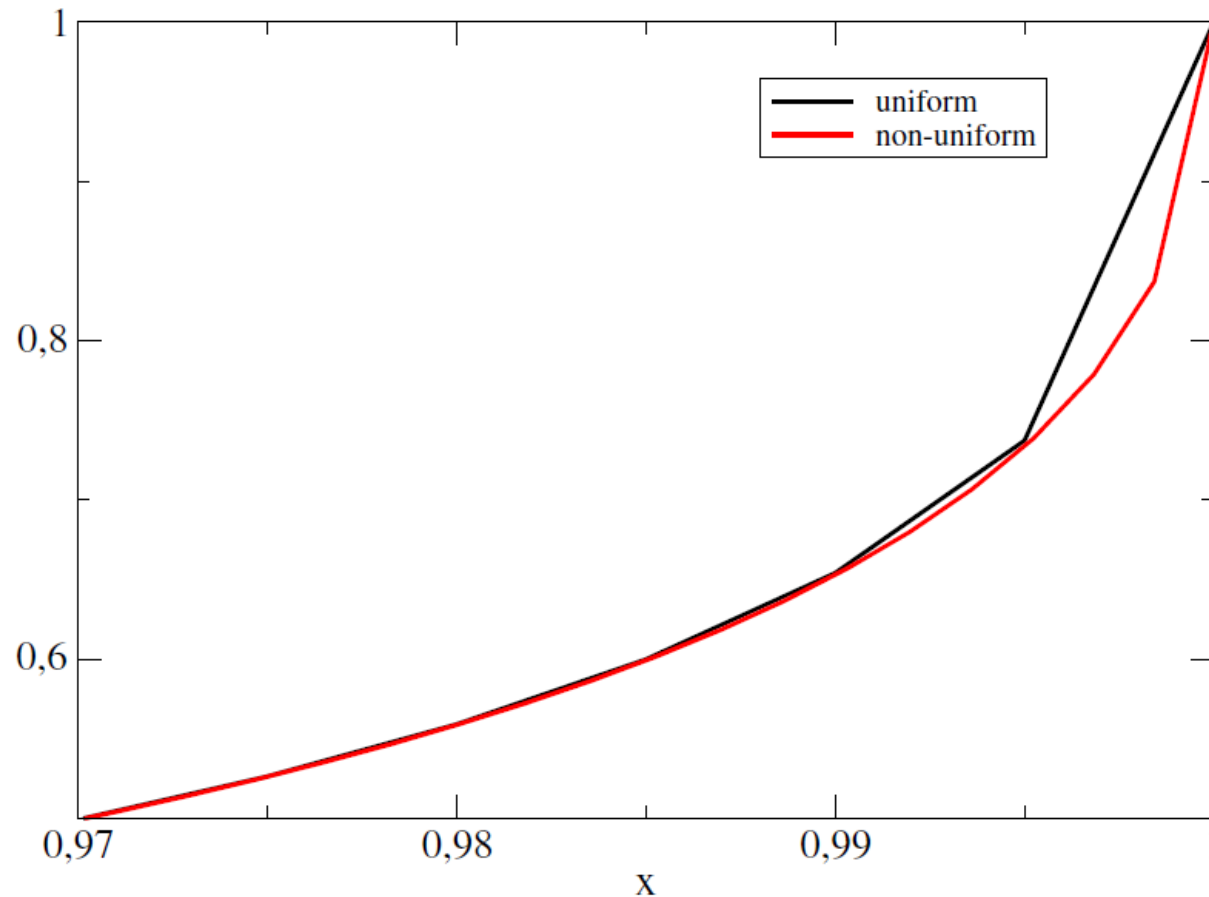
- Minėti metodai tinka ir netolygiems erdvės tinklams. Sprendėme uždavinį su netolygiu tinklu:

$$\omega_h = \left\{ x_j : x_j = x_{j-1} + h_{j-1/2}, j = 1, \dots, J, x_0 = 0, x_J = 1 \right\}, h_{j-1/2} = h e^{-2j/J}$$

- Ir naudodami tokį difuzijos operatorių:

$$A_h U = -\frac{1}{h_j} \left(\frac{U_{j+1} - U_j}{h_{j+1/2}} - \frac{U_j - U_{j-1}}{h_{j-1/2}} \right), h_j = \frac{h_{j-1/2} + h_{j+1/2}}{2}, j = 1, \dots, J-1.$$

Trupmeninio laipsnio elipsinių operatorių taikymas reakcijos-difuzijos lygtims



- AAA algoritmas pasiekia gana didelį tikslumą su nedideliu aproksimacijos narių skaičiumi.
- Išplėtimo algoritmas panašų tikslumą pasiekia su žymiai didesniu narių skaičiumi. Tačiau jis lengvai lygiagretinamas.
- Skaidymo algoritmas yra tiksliausias, tačiau sunkiai lygiagretinamas.
- Reakcijos-difuzijos lygties sprendimą apsunkina nehomogeninės kraštinės sąlygos.
- Keičiant α , keičiasi substrato profiliai, atsiranda pasienio sluoksnis.
- Kyla klausimas, kokią įtaką nelokali difuzija turi biojutiklio atsakams?

Pristatomas straipsnis

- Čiegis, R.; Čiegis, R.; Dapšys, I. A Comparison of Discrete Schemes for Numerical Solution of Parabolic Problems with Fractional Power Elliptic Operators. *Mathematics* **2021**, *9*, 1344. DOI: 10.3390/math9121344.

Nuorodos

1. Ilic, M.; Liu, F.; Turner, I.W.; Anh, V. Numerical approximation of a fractional-in-space diffusion equation–II-with nonhomogeneous boundary conditions. *Fract. Calc. Appl. Anal.* **2006**, *9*, 333–349.
2. Li, Q.; Song, F. Splitting spectral element method for fractional reaction-diffusion equations. *J. Algorithms Comput. Technol.* **2020**, *14*, 1–10.

Ačiū už dėmesį