


*Article*

# On Construction of Partially Dimension-Reduced Approximations for Nonstationary Nonlocal Problems of a Parabolic Type

Raimondas Čiegis <sup>1,\*</sup> , Vadimas Starikovičius <sup>1</sup>, Olga Suboč <sup>1</sup> and Remigijus Čiegis <sup>2</sup>

<sup>1</sup> Department of Mathematical Modelling, Vilnius Gediminas Technical University, Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lithuania; vadimas.starikovicius@vgtu.lt (V.S.); olga.suboc@vgtu.lt (O.S.)

<sup>2</sup> Kaunas Faculty, Vilnius University, Muitinės St. 8, LT-44280 Kaunas, Lithuania; remigijus.ciegis@knf.vu.lt

\* Correspondence: raimondas.ciegis@vgtu.lt

## 1. Pranešimo planas

- Uždavinio formulavimas
- Skirtuminės schemos: Crank-Nicolson +ADI
- Trupmeninio laipsnio elipsinis operatorius
- BURA-BRASIL
- ADI dalinai sumažintos dimensijos uždaviniui
- BURA-BRASIL dalinai sumažintos dimensijos uždaviniui su trupmeninio laipsnio elipsiniu operatoriumi

## 2. Uždavinio formulavimas

Tegu  $D = (0, X) \times (0, Y)$  - dvimatė sritis,  $\partial D$  – jos kraštas. Apibrėžkime difuzijos operatorių

$$Au = - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (x, y) \in D.$$

Pradėkime nuo dvimačio parabolinio uždavinio

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = 0, \quad (x, y) \in D, \quad 0 < t \leq T,$$

$$u(0, y, t) = g_1(y, t), \quad u(X, y, t) = g_2(y, t), \quad y \in [0, Y], \quad t \in [0, T],$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, Y, t) = 0, \quad x \in (0, X), \quad t \in [0, T],$$

$$u(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in D.$$

Tegu  $H$  – Hilberto erdvė, skaliarinė sandauga  $(u, v)$ . Tuomet  $L_2$  norma apibrėžiama  $\|u\| = (u, u)^{1/2}$ . Tegu  $A$  – operatorius (savijungis ir teigiamai apibrėžtas)

$$A : H \rightarrow H, \quad A = A^*, \quad A \geq cI, \quad c > 0,$$

Čia  $I$  – vienetinis operatorius.

Kai  $0 < \alpha < 1$ , operatorius  $A^\alpha$  gali būti apibrėžtas skirtingais būdais. Spręskime tikrinį uždavinį

$$A\psi_j = \lambda_j\psi_j, \quad j = 1, 2, \dots$$

Visos tikrinės reikšmės yra teigiamos

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m \leq \dots$$

Tikrinės funkcijos  $\{\psi_j\}$  sudaro ortonormuotą bazę. Taigi bet kurią funkciją  $u \in H$  galima užrašyti pavidalu

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} (u, \psi_j) \psi_j.$$

Taigi, nelokalų operatorių  $A^\alpha$ , kai  $0 < \alpha < 1$  galima užrašyti taip:

$$A^\alpha u = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\alpha (u, \psi_j) \psi_j.$$

Panašiai, spręsimė Koši uždavinį

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + A^\alpha u &= 0, \quad 0 < t \leq T, \\ u(0) &= u_0, \quad u_0 \in H. \end{aligned}$$

Pastabos: naudodami Furjė metodą sprendinį galima užrašyti išreikštiniu pavidalu. Taikymuose tai įmanoma ne visada.

Apibrėžkime dalinai sumažintos dimensijos aproksimaciją. Uždavinį spręsimė srityje

$$D_\delta = ((0, \delta) \times (0, Y)) \cup [\delta, X - \delta] \cup ((X - \delta, X) \times (0, Y)), \quad \delta > 0$$

$$S(u) = \frac{1}{Y} \int_0^Y u(x, y, t) dy$$

apibrėžia vidurkinimo operatorių pagal  $y$ .



Funkcija  $U$  yra sprendinys, jei tenkina:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + AU = 0, \quad (x, y, t) \in (0, \delta) \cup (X - \delta, X) \times (0, Y) \times (0, T],$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in (\delta, X - \delta) \times (0, T],$$

$$U(0, y, t) = g_1(y, t), \quad U(X, y, t) = g_2(y, t), \quad (y, t) \in [0, Y] \times (0, T],$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x, 0, t) = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x, Y, t) = 0, \quad (x, t) \in (0, \delta) \cup (X - \delta, X) \times (0, T],$$

$$U(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in D_\delta.$$

Trūkio taškuose

$$U|_{x=\delta-0} = U|_{x=\delta+0}, \quad U|_{x=X-\delta-0} = U|_{x=X-\delta+0},$$

$$\frac{\partial S(U)}{\partial x} \Big|_{x=\delta-0} = \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=\delta+0}, \quad \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=X-\delta-0} = \frac{\partial S(U)}{\partial x} \Big|_{x=X-\delta+0}.$$

Pirmos dvi garantuoja tolydumą, kitos gaunamos iš tvermės dėsnių

### 3. Diskrečiosios schemos

2D difuzijos operatoriaus  $A$  aproksimaciją konstruosime baigtinių tūrių metodu.

Tinklas:  $\bar{\Omega}_h = \bar{\omega}_x \times \bar{\omega}_y$

$$\bar{\omega}_x = \{x_i : x_i = ih, \quad i = 0, \dots, J_x, \quad h_x = X/J_x\},$$

$$\bar{\omega}_y = \{y_j : y_j = jh, \quad j = 0, \dots, J_y, \quad h_y = Y/J_y\}.$$

Pagal laiką:

$$\bar{\omega}_t = \{t^n : t^n = n\tau, \quad n = 0, \dots, N\}, \quad t^N = T.$$



Operatoriai:

$$\partial_x U_{ij}^n := \frac{U_{ij}^n - U_{i-1,j}^n}{h_x}, \quad \partial_y U_{ij}^n := \frac{U_{ij}^n - U_{i,j-1}^n}{h_y},$$
$$\partial_t U_{ij}^n := \frac{U_{ij}^{n+1} - U_{ij}^n}{\tau}, \quad U_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{U_{ij}^{n+1} + U_{ij}^n}{2}.$$

Difuzijos operatoriai:

$$A_{hx} U_{ij}^n := -\frac{1}{h_x} \left( \partial_x U_{i+1,j}^n - \partial_x U_{ij}^n \right), \quad 0 < i < J_x, \quad 0 \leq j \leq J_y,$$
$$A_{hy} U_{ij}^n := \begin{cases} -\frac{2}{h_y} \partial_y U_{i1}^n, & j = 0, \\ -\frac{1}{h_y} \left( \partial_y U_{i,j+1}^n - \partial_y U_{ij}^n \right), & 0 < j < J_y, \quad 0 < i < J_x. \\ \frac{2}{h_y} \partial_y U_{i,J_y}^n, & j = J_y, \end{cases}$$

Naudojame simetrinę aproksimaciją pagal laiką ir baigtinių tūrių metodą pagal erdvines koordinates (gauname Crank-Nicolson):

$$\partial_t U_{ij}^n + (A_{hx} + A_{hy})U_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{h_x^2} \left( \delta_{i1} g_1^{n+\frac{1}{2}}(y_j) + \delta_{i, J_x-1} g_2^{n+\frac{1}{2}}(y_j) \right), \quad (x_i, y_j) \in \omega_x \times \bar{\omega}_y,$$

Kur  $\delta_{ik}$  - Kronekerio delta funkcija. Nehomogeninės kraštinės sąlygos įdėtos papildomo šaltinio pavidalu.

Tarkime, kad  $U_{ij}^n$  tenkina homogenines kraštinės sąlygas, kai  $i = 0$  ir  $i = J_x$ .

Tuomet tikslus Crank-Nicolson schemos sprendinys  $\tilde{U}^n$

$$\tilde{U}_{ij}^n = U_{ij}^n, \quad 0 < i < J_x, \quad 0 \leq j \leq J_y,$$

$$\tilde{U}_{0j}^n = g_1^n(y_j), \quad \tilde{U}_{J_x, j}^n = g_2^n(y_j), \quad 0 \leq j \leq J_y,$$

(ši prielaida naudojama visur, kur naudosime spektrinius algoritmus įskaitant FFT)

**1 lema.** Cranc-Nicolson diskrečioji schema yra nesąlygiškai stabili  $L_2$  normoje. Jei uždavinio sprendinys yra pakankamai glodi funkcija, tai aproksimavimo paklaida yra  $O(h_t^2 + h_x^2 + h_y^2)$  eilės.

Stabilumas įrodomas naudojant Furje analizę ir Teiloro skleidinį + Lax teoremą.

Pastabos: skaičiavimo eigoje naudojama FFT, išreikštinis tikrinių reikšmių ir vektorių pavidalas bus pateiktas vėliau.

**1 pavyzdys.** Sprendžiamas tiesinis dvimatis difuzijos uždavinys srityje

$\bar{D} = [0,2] \times [0,1]$  . Kraštinės sąlygos

$$g_1(y,t) = t \exp\left(-25(y-0.5)^2\right), \quad g_2(y,t) = 2t \exp\left(-36(y-0.5)^2\right), \quad y \in [0,1], \quad t \in [0,1].$$

Sprendžiame tikrinį uždavinį

$$A_h \Psi_{lk} = \lambda_{lk} \Psi_{lk}, \quad 0 < l < J_x, \quad 0 \leq k \leq J_y,$$

Kur  $\Psi_{il} = \Phi_l^x \Phi_k^y$ ,  $\lambda_{lk} = \mu_l^x + \mu_k^y$ , o  $\Phi_l^x$ ,  $\Phi_k^y$  randame iš:

$$A_{hx} \Phi_l^x = \mu_l^x \Phi_l^x, \quad 0 < l < J_x,$$

$$A_{hy} \Phi_k^y = \mu_k^y \Phi_k^y, \quad 0 < k < J_y.$$

Šio uždavinio atveju

$$\Phi_l^x(x_i) = \sqrt{2/X} \sin\left(\pi l \frac{x_i}{X}\right), \quad \mu_l^x = \frac{4}{h_x^2} \sin^2\left(\frac{\pi l}{2J_x}\right), \quad 0 < l < J_x, \quad x_i \in \bar{\omega}_x,$$

$$\Phi_k^y(y_j) = \sqrt{2/Y} \cos\left(\pi k \frac{y_j}{Y}\right), \quad \mu_k^y = \frac{4}{h_y^2} \sin^2\left(\frac{\pi k}{2J_y}\right), \quad 0 \leq k \leq J_y, \quad y_j \in \bar{\omega}_y.$$

Paklaidos  $E(\tau, h)$  ir eksperimentinis konvergavimo greitis  $\rho(\tau, h)$ , kai  $h_x = h_y = h$  maksimumo normoje

$$E(\tau, h_x, h_y) = \max_{(x_i, y_j) \in \bar{\Omega}_h} \left| U_{ij}^N - u(x_i, y_j, 1) \right|, \quad \rho(\tau, h_x, h_y) = \log_2 \left( \frac{E(2\tau, 2h_x, 2h_y)}{E(\tau, h_x, h_y)} \right)$$

$\tau_0 = \frac{1}{10}, h_0 = \frac{1}{16}$	$\tau_0, h_0$	$\frac{\tau_0}{2}, \frac{h_0}{2}$	$\frac{\tau_0}{4}, \frac{h_0}{4}$	$\frac{\tau_0}{8}, \frac{h_0}{8}$
$E(\tau, h)$	$1.557 \times 10^{-2}$	$3.915 \times 10^{-3}$	$9.558 \times 10^{-4}$	$2.316 \times 10^{-4}$
$\rho(\tau, h)$	—	1.992	2.034	2.045

Skaičiavimai atlikti su tolygiais tinklais, „tikslus“ sprendinys  $u(x_i, y_j, 1)$  apskaičiuotas su  $J_x = 1024, J_y = 512, N = 500$ .

Uždavinys su dalinai sumažinta dimensija sprendžiamas ADI tipo schema

$$\frac{\hat{U}_{ij}^n - U_{ij}^n}{\frac{1}{2}\tau} + A_{hx}U_{ij}^n + A_{hy}\hat{U}_{ij}^n = 0, \quad (x_i, y_j) \in \omega_x \times \bar{\omega}_y,$$

$$\frac{U_{ij}^{n+1} - \hat{U}_{ij}^n}{\frac{1}{2}\tau} + A_{hx}U_{ij}^{n+1} + A_{hy}\hat{U}_{ij}^n = 0, \quad (x_i, y_j) \in \omega_x \times \bar{\omega}_y.$$

Sprendimo eigoje turime tiesinių lygčių sistemas pagal vieną dimensiją, užduotis gali būti lygiagretinama.

**2 lema.** ADI diskrečioji schema yra nesąlygiškai stabili  $L_2$  normoje. Jei uždavinio sprendinys yra pakankamai glodi funkcija, tai aproksimavimo paklaida yra  $O(h_t^2 + h_x^2 + h_y^2)$  eilės.

Stabilumas įrodomas naudojant spektrinę Furje analizę Tikslumas įvertinamas transformuojant ADI į Crank-Nicolson.

**2 lentelė.** Paklaidos  $E(\tau)$  ir eksperimentinis konvergavimo greitis  $\rho(\tau)$ , kai  $h_x = h_y = h$ , maksimumo normoje

$\tau_0 = \frac{1}{10}, h_0 = \frac{1}{16}$	$\tau_0, h_0$	$\frac{\tau_0}{2}, \frac{h_0}{2}$	$\frac{\tau_0}{4}, \frac{h_0}{4}$	$\frac{\tau_0}{8}, \frac{h_0}{8}$
$E(\tau, h)$	$6.617 \times 10^{-2}$	$1.837 \times 10^{-2}$	$4.721 \times 10^{-3}$	$1.176 \times 10^{-3}$
$\rho(\tau, h)$	—	1.849	1.960	2.005

Pastabos: Crank-Nicolson rezultatai tikslesni

### 3. Diskrečiosios schemos paraboliniam uždaviniui su trupmeniniu eliptinio operatoriaus laipsniu

$A^\alpha$  aproksimacija:  $H_h$  - Hilberto erdvė, skaliarinė sandauga  $(U, V)$ :

$$(U, V) = \sum_{i=1}^{J_x-1} \sum_{j=0}^{J_y} U_{ij} V_{ij} h_x h_y c_j, \quad c_j = \begin{cases} 1, & 0 < j < J_y, \\ 0.5, & j = 0, J_y. \end{cases}$$

Kraštinės  $U$  sąlygos homogeninės

$$U_{0j} = 0, \quad U_{J_x, j} = 0, \quad 0 \leq j \leq J_y.$$

Lengva patikrinti, kad  $A_h = A_{hx} + A_{hy}$  - savijungis teigiamai apibrėžtas

$$A_h : H_h \rightarrow H_h, \quad A_h = A_h^*, \quad A_h \geq cI_h, \quad c > 0,$$

$I_h$  - vienetas



Sprendžiame tikrinį uždavinį

$$A_h \Psi_{lk} = \lambda_{lk} \Psi_{lk}, \quad 0 < l < J_x, \quad 0 \leq k \leq J_y,$$

Kur  $\Psi_{il} = \Phi_l^x \Phi_k^y$ ,  $\lambda_{lk} = \mu_l^x + \mu_k^y$ , o  $\Phi_l^x$ ,  $\Phi_k^y$  randame iš:

$$A_{hx} \Phi_l^x = \mu_l^x \Phi_l^x, \quad 0 < l < J_x,$$

$$A_{hy} \Phi_k^y = \mu_k^y \Phi_k^y, \quad 0 < k < J_y.$$

Visos tikrinės reikšmės yra teigiamos

$$0 < \lambda_{10} \leq \dots \leq \lambda_{J_x-1, J_y}$$

Tikrinės funkcijos  $\{\Psi_{lk}\}$  sudaro ortonormuotą bazę  $H_h$

Tuomet bet kokią funkciją  $U \in H_h$  galima užrašyti

$$U = \sum_{k=1}^{J_x-1} \sum_{l=0}^{J_y} (U, \Psi_{kl}) \Psi_{kl}.$$

Trupmeninis operatorius  $A^\alpha$  keičiamas aproksimacija

$$A_h^\alpha U = \sum_{k=1}^{J_x-1} \sum_{l=0}^{J_y} \lambda_{kl}^\alpha (U, \Psi_{kl}) \Psi_{kl}$$

Naudojame simetrinę aproksimaciją pagal laiką ar  $A_h^\alpha$ :

$$\partial_t U^n + A_h^\alpha U^{n+\frac{1}{2}} = A_h^{\alpha-1} F^{n+\frac{1}{2}},$$

Kur  $F^{n+\frac{1}{2}} = \left( f_{ij}^{n+\frac{1}{2}}, 0 < i < J_x, 0 \leq j \leq J_y \right)$ , o

$f_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{h^2} \left[ \delta_{i1} g_1^{n+\frac{1}{2}}(y_j) + \delta_{i, J_x-1} g_2^{n+\frac{1}{2}}(y_j) \right]$  savyje turi nehomogeninę kraštinę sąlygą

$$u(0, y, t) = g_1(y, t), \quad u(X, y, t) = g_2(y, t), \quad y \in [0, Y], \quad 0 < t \leq T$$

Stabilumas įrodomas panašiai kaip 1 lemoje.

Tikslumas: užrašykime paklaida standartiniu pavidalu:

$$\Psi_h(t^{n+\frac{1}{2}}) := \partial_t u_h^n + A_h^\alpha u_h^{n+\frac{1}{2}} = A_h^\alpha u_h(t^{n+\frac{1}{2}}) - (A^\alpha u(t^{n+\frac{1}{2}}))_h + O(\tau^2).$$

Teiloro skleidinio naudoti negalime. Naudojame spektrinį nelokalio operatorių  $A^\alpha$  ir  $A_h^\alpha$  apibrėžimą. Tuomet

$$A_h^\alpha u_h(t^n) - (A^\alpha u(t^n))_h = \sum_{j=1}^J (u_{hj}^n \mu_j^\alpha \psi_j^h - u_j(t^n) \lambda_j^\alpha \psi_j) - \sum_{j=J+1}^{\infty} \lambda_j^\alpha u_j \psi_j.$$

Antras narys yra  $O(h^m)$  ir priklauso nuo sprendinio glogumo. Taip pat, tikrinėms reikšmėms ir tikriniais vektoriams

$$\|\psi_j^h - \psi_{jh}\| \leq Ch^2, \quad |\mu_j^\alpha - \lambda_j^\alpha| \leq Ch^2, \quad j = 1, \dots, J.$$

Dėl nehomogeninės kraštinės sąlygos diskretaus sprendinio konvergavimo greitis priklauso nuo tikslaus sprendinio glodumo ir parametro  $\alpha$  santykio.

$L_2$  normoje standartinėms antros eilės aproksimacijoms pagal erdvines koordinates

$$E_h \leq Ch^{\min(2, 2\alpha+0.5)} \log(1/h)$$

**3 lentelė.** Paklaidos  $E(\tau, h)$  ir eksperimentinis konvergavimo greitis  $\rho(\tau, h)$ , kai  $h_x = h_y = h$  su skirtingomis  $\alpha$  reikšmėmis

$\tau_0 = \frac{1}{10}, h_0 = \frac{1}{16}$	$\tau_0, h_0$	$\frac{\tau_0}{2}, \frac{h_0}{2}$	$\frac{\tau_0}{4}, \frac{h_0}{4}$	$\frac{\tau_0}{8}, \frac{h_0}{8}$
$E(\tau, h), \alpha = \frac{3}{4}$	$1.528 \times 10^{-2}$	$3.919 \times 10^{-3}$	$9.865 \times 10^{-4}$	$2.365 \times 10^{-4}$
$\rho(\tau, h)$	—	1.963	1.990	2.060
$E(\tau, h), \alpha = \frac{1}{2}$	$1.696 \times 10^{-2}$	$4.466 \times 10^{-3}$	$1.194 \times 10^{-3}$	$4.038 \times 10^{-4}$
$\rho(\tau, h)$	—	1.925	1.903	1.564
$E(\tau, h), \alpha = \frac{1}{4}$	$2.213 \times 10^{-2}$	$1.028 \times 10^{-2}$	$5.850 \times 10^{-3}$	$3.682 \times 10^{-3}$
$\rho(\tau, h)$	—	1.106	0.8130	0.6680

Tas pats uždavinys sprendžiamas su homogeninėmis sąlygomis

$$g_1(y, t) = 0, \quad g_2(y, t) = 0$$

Pradinės sąlygos

$$u_0(x, y) = x(2 - x) \cos(\pi y), \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Šiuo atveju simetrinės schemos konvergavimo greitis yra kvadratinis

**4 lentelė.** Paklaidos  $E(\tau, h)$  ir eksperimentinis konvergavimo greitis  $\rho(\tau, h)$ , kai  $h_x = h_y = h$  su skirtingomis  $\alpha$  reikšmėmis

$\tau_0 = \frac{1}{10}, h_0 = \frac{1}{16}$	$\tau_0, h_0$	$\frac{\tau_0}{2}, \frac{h_0}{2}$	$\frac{\tau_0}{4}, \frac{h_0}{4}$	$\frac{\tau_0}{8}, \frac{h_0}{8}$
$E(\tau, h), \alpha = \frac{3}{4}$	$6.657 \times 10^{-3}$	$1.637 \times 10^{-3}$	$4.074 \times 10^{-4}$	$1.015 \times 10^{-4}$
$\rho(\tau, h)$	—	2.024	2.006	2.005
$E(\tau, h), \alpha = \frac{1}{2}$	$3.027 \times 10^{-3}$	$7.512 \times 10^{-4}$	$1.875 \times 10^{-4}$	$4.694 \times 10^{-5}$
$\rho(\tau, h)$	—	2.011	2.002	1.998

## 5. BURA-BRASIL

Praeitame skyriuje naudojome FFT, kuris efektyvus kai kurioms funkcijų klasėms ir tolygiam tinklui. Perrašykime Crank-Nicolson schemą

$$U^{n+\frac{1}{2}} = (I_h + 0.5\tau A_h^\alpha)^{-1} \left( U^n + 0.5\tau A_h^{\alpha-1} F^{n+\frac{1}{2}} \right),$$
$$U^{n+1} = 2U^{n+\frac{1}{2}} - U^n.$$

Aproksimuojame netiesinius operatorius  $(I_h + 0,5\tau A_h^\alpha)^{-1}$  ir  $A_h^{\alpha-1}$  racionaliais operatoriais

$$(I_h + 0.5\tau A_h^\alpha)^{-1} \approx r_m(A_h), \quad A_h^{\alpha-1} \approx \tilde{r}_m(A_h).$$

Pavyzdžiui,

$$r_m(\lambda) = \frac{p_m(\lambda)}{q_m(\lambda)}$$

Kur  $p_m$  ir  $q_m$  - tos pačios eilės daugianariai

$$r_m(\lambda) = c_0 + \sum_{j=1}^m \frac{c_j}{\lambda - d_j}$$

Gauname  $m$  sistemų, kurias galime spręsti lygiagrečiai.

Skaičiavimams naudojame: BURA (best uniform rational approximation) ir open-source BRASIL algoritmo implementacija su Python

$$\tilde{F}^{n+\frac{1}{2}} = \tilde{r}_m(A_h) F^{n+\frac{1}{2}},$$

$$V^{n+\frac{1}{2}} = r_m(A_h) \left( V^n + 0.5\tau \tilde{F}^{n+\frac{1}{2}} \right),$$

$$V^{n+1} = 2V^{n+\frac{1}{2}} - V^n.$$

Čia  $\tilde{F}^{n+\frac{1}{2}}$  skaičiuojamas pagal formulę

$$\tilde{F}^{n+\frac{1}{2}} = \tilde{c}_0 F^{n+\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^m \tilde{c}_k G_k^{n+\frac{1}{2}},$$

$$(A_h - \tilde{d}_k I_h) G_k^{n+\frac{1}{2}} = F^{n+\frac{1}{2}}, \quad k = 1, \dots, m$$

Panašiai,  $V^{n+\frac{1}{2}}$ :

$$V^{n+\frac{1}{2}} = c_0 \left( V^n + 0.5\tau \tilde{F}^{n+\frac{1}{2}} \right) + \sum_{k=1}^m c_k H_k^{n+\frac{1}{2}},$$

$$(A_h - d_k I_h) H_k^{n+\frac{1}{2}} = \left( V^n + 0.5\tau \tilde{F}^{n+\frac{1}{2}} \right), \quad k = 1, \dots, m$$

Tirdami stabilumą turime skaičiuoti  $\|2r_m(A_h) - I_h\|$ . Atlikdami skaitinius eksperimentus, skaičiuosime stabilumo faktorių  $R$  (mūsų uždavinio atveju turi būti  $R \leq 1$ )

$$R = \max_{0 \leq j \leq K} |2r_m(z_j) - 1|, \quad z_j = \mu_1 + \frac{j}{K}(\mu_J - \mu_1).$$



**5 lentelė.** Paklaidos  $E(\tau, h)$  BURA-BRASIL, kai  $h_x = h_y = h$  su skirtingomis  $m$  reikšmėmis,  $\alpha = \frac{3}{4}$

$\tau_0 = \frac{1}{10}, h_0 = \frac{1}{16}$	$\tau_0, h_0$	$\frac{\tau_0}{2}, \frac{h_0}{2}$	$\frac{\tau_0}{4}, \frac{h_0}{4}$
$E(\tau, h), m = 5$	$1.044 \times 10^{-2}$	$1.894 \times 10^{-2}$	$2.997 \times 10^{-2}$
$E(\tau, h), m = 10$	$2.611 \times 10^{-4}$	$8.230 \times 10^{-4}$	$1.953 \times 10^{-3}$

## 5. ADI, dalinai sumažinta dimensija

Pasirinktam testui, klasikinės ar trupmeninės difuzijos atveju, sprendinio  $U^n(x_i, y_j)$  asimptotika: didžioji dalis funkcijos  $U$  artima konstantai kintamojo  $y$  atžvilgiu. Dvimatis uždavinys turi būti sprendžiamas tik nedidelėje srities dalyje.

6 lentelė: 
$$\tilde{\delta}(x_i) = \max_{j \in \bar{\omega}_y} |U_{ij}^N - U_{i, J_y/2}^N|$$

Kai  $t = 1$ ,  $h_x = h_y = h_t = 0,01$  su  $\alpha = 1$  ir  $\alpha = 3/4$  (BURA-BRASIL)

	$x_i = 0.7$	$x_i = 0.9$	$x_i = 1$	$x_i = 1.1$	$x_i = 1.3$
$\tilde{\delta}(x_i), \alpha = 1$	0.0118	0.00475	0.00474	0.00672	0.0211
$\tilde{\delta}(x_i), \alpha = \frac{3}{4}$	0.00906	0.00358	0.00356	0.00509	0.0166

Kaip alternatyva, galime naudoti adaptyvius tinklus (planuojama ateičiai)

Naudosime tinklus:

$$\begin{aligned}\omega_{x1} &= \{x_i : 0 < i < J_{x1}\}, & \omega_{x2} &= \{x_i : J_{x2} < i < J_x\}, & \omega_{x3} &= \{x_i : J_{x1} < i < J_{x2}\}, \\ \bar{\omega}_{x1} &= \{x_i : 0 \leq i < J_{x1}\}, & \bar{\omega}_{x2} &= \{x_i : J_{x2} < i \leq J_x\}, & \bar{\omega}_{x3} &= \{x_i : J_{x1} \leq i \leq J_{x2}\}, \\ x_{J_{x1}} &= \delta, & x_{J_{x2}} &= X - \delta.\end{aligned}$$

Diskretusis sprendinys  $U_{ij}$  apibrėžtas sumažintos dimensijos srityje (RD)

$$\overline{\Omega}_h^{RD} = (\bar{\omega}_{x1} \times \bar{\omega}_y) \cup \bar{\omega}_{x3} \cup (\bar{\omega}_{x2} \times \bar{\omega}_y)$$

Tokių diskrečių funkcijų klasę žymėsime  $D_h$ . Tegu  $U, V \in D_h$  tenkina kraštines sąlygas

$$U_{0j} = 0, \quad U_{J_x, j} = 0, \quad V_{0j} = 0, \quad V_{J_x, j} = 0, \quad 0 \leq j \leq J_y$$

Tuomet skaliarinė sandauga

$$(U, V) = \sum_{j=0}^{J_y} c_j \left( \sum_{i=1}^{J_{x1}-1} U_{ij} V_{ij} h_x + \sum_{i=J_{x2}+1}^{J_x-1} U_{ij} V_{ij} h_x \right) h_y + Y \sum_{k=K_1}^{K_2} U_{i0} V_{i0} h_x,$$

$$c_0 = \frac{1}{2}, \quad c_{J_y} = \frac{1}{2}, \quad c_j = 1, \quad 0 < j < J_y,$$

$$\|U\| = (U, U)^{1/2}$$

Vidurkinimo operatorius:

$$S_h(U_i^n) = \frac{h_y}{Y} \left( \frac{1}{2} U_{i0}^n + \sum_{j=1}^{J_y-1} U_{ij}^n + \frac{1}{2} U_{i, J_y}^n \right)$$

Aproksimuojame:

$$\frac{\widehat{U}_{ij}^n - U_{ij}^n}{\frac{1}{2}\tau} + A_{hx} U_{ij}^n + A_{hy} \widehat{U}_{ij}^n = 0, \quad (x_i, y_j) \in (\omega_{x1} \cup \omega_{x2}) \times \bar{\omega}_y,$$

$$\frac{\widehat{U}_{i0}^n - U_{i0}^n}{\frac{1}{2}\tau} + A_{hx} U_{i0}^n = 0, \quad x_i \in \omega_{x3},$$

$$\frac{\widehat{U}_{J_{x1},0}^n - U_{J_{x1},0}^n}{\frac{1}{2}\tau} + \frac{1}{h_x^2} (-S_h(U_{J_{x1}-1}^n) + 2U_{J_{x1},0}^n - U_{J_{x1}+1,0}^n) = 0,$$

$$\frac{\widehat{U}_{J_{x2},0}^n - U_{J_{x2},0}^n}{\frac{1}{2}\tau} + \frac{1}{h_x^2} (-U_{J_{x2}-1,0}^n + 2U_{J_{x2},0}^n - S_h(U_{J_{x2}+1}^n)) = 0,$$

$$\frac{U_{ij}^{n+1} - \widehat{U}_{ij}^n}{\frac{1}{2}\tau} + A_{hx} U_{ij}^{n+1} + A_{hy} \widehat{U}_{ij}^n = 0, \quad (x_i, y_j) \in (\omega_{x1} \cup \omega_{x2}) \times \bar{\omega}_y,$$

$$\frac{U_{i0}^{n+1} - \widehat{U}_{i0}^n}{\frac{1}{2}\tau} + A_{hx} U_{i0}^{n+1} = 0, \quad x_i \in \omega_{x3},$$

$$\frac{U_{J_{x1},0}^{n+1} - \hat{U}_{J_{x1},0}^n}{\frac{1}{2}\tau} + \frac{1}{h_x^2} \left( -S_h(U_{J_{x1}-1}^{n+1}) + 2U_{J_{x1},0}^{n+1} - U_{J_{x1}+1,0}^{n+1} \right) = 0,$$

$$\frac{U_{J_{x2},0}^{n+1} - \hat{U}_{J_{x2},0}^n}{\frac{1}{2}\tau} + \frac{1}{h_x^2} \left( -U_{J_{x2}-1,0}^{n+1} + 2U_{J_{x2},0}^{n+1} - S_h(U_{J_{x2}+1}^{n+1}) \right) = 0.$$

Apibrēžkime operatorius funkcijoms  $U \in D_h$

$$\mathcal{A}_{hy}U = \begin{cases} A_{hy}U_{ij}, & (x_i, y_j) \in (\omega_{x1} \cup \omega_{x2}) \times \bar{\omega}_y, \\ 0, & x_i \in \bar{\omega}_{x3}, \end{cases}$$

$$\mathcal{A}_{hx}U = \begin{cases} A_{hx}U_{ij}, & (x_i, y_j) \in (\omega_{x1} \cup \omega_{x2}) \times \bar{\omega}_y, \\ A_{hx}U_{i0}, & x_i \in \omega_{x3}, \\ \frac{1}{h_x^2} \left( -S_h(U_{i-1}) + 2U_{i0} - U_{i+1,0} \right), & i = J_{x1}, \\ \frac{1}{h_x^2} \left( -U_{i-1,0} + 2U_{i0} - S_h(U_{i+1}) \right), & i = J_{x2}, \end{cases}$$

Tuomet ADI schemą galime užrašyti taip:

$$\frac{\hat{U}^n - U^n}{\frac{1}{2}\tau} + \mathcal{A}_{hx}U^n + \mathcal{A}_{hy}\hat{U}^n = 0,$$
$$\frac{U^{n+1} - \hat{U}^n}{\frac{1}{2}\tau} + \mathcal{A}_{hx}U^{n+1} + \mathcal{A}_{hy}\hat{U}^n = 0.$$

Pirmas žingsnis – trijstrižainių sistemų sprendimas (galima lygiagrečiai), antrame žingsnyje sprendinys tinkle  $\omega_{x1} \times \bar{\omega}_y$  turi pavidalą

$$U_{ij} = \alpha_{ij}g_1(y_j) + \beta_{ij}U_{J_{x1},0} + \gamma_{ij}, \quad 0 \leq i < J_{x1}, \quad y_j \in \bar{\omega}_y,$$

O tinkle  $\omega_{x2} \times \bar{\omega}_y$  -

$$U_{ij} = \alpha_{ij}U_{J_{x2},0} + \beta_{ij}g_2(y_j) + \gamma_{ij}, \quad J_{x1} < i \leq J_{x2}, \quad y_j \in \bar{\omega}_y.$$

Tinkle  $\bar{\omega}_{x3}$  -

$$\left(\frac{2}{\tau}I + A_{hx}\right)U_{i0}^{n+1} = \frac{2}{\tau}\hat{U}_{i0}^n, \quad J_{x1} < i < J_{x2},$$

$$\left(\frac{2}{\tau} + \frac{1}{h_x^2}(2 - S_h(\beta_{i-1}))\right)U_{i0}^{n+1} - \frac{1}{h_x^2}U_{i+1,0}^{n+1} = \frac{2}{\tau}\hat{U}_{i0}^n + \frac{1}{h_x^2}S_h(\alpha_{i-1}g_1 + \gamma_{i-1}), \quad i = J_{x1},$$

$$\left(\frac{2}{\tau} + \frac{1}{h_x^2}(2 - S_h(\beta_{i+1}))\right)U_{i0}^{n+1} - \frac{1}{h_x^2}U_{i-1,0}^{n+1} = \frac{2}{\tau}\hat{U}_{i0}^n + \frac{1}{h_x^2}S_h(\alpha_{i+1}g_2 + \gamma_{i+1}), \quad i = J_{x2}.$$

Galima spręsti klasikiniu būdu. Kai  $U_{J_{x1},0}^{n+1}, U_{J_{x2},0}^{n+1}$  yra apskaičiuoti, randame likusią dalį sprendinio  $U^{n+1}$

**3 lema.** Diskretieji operatoriai  $A_{hx} A_{hy}$  yra simetriniai ir atitinkamai teigiamas ir neneigiamas.

Įrodymas: Apsiribosime operatoriaus  $A_{hx}$  tyrimu. Apibrėžkime vektorius  $U, V$  tinkle  $\omega_y$

$$U_{J_{x1},j} = U_{J_{x1},0}, \quad U_{J_{x2},j} = U_{J_{x2},0}, \quad V_{J_{x1},j} = V_{J_{x1},0}, \quad V_{J_{x2},j} = V_{J_{x2},0}, \quad y_j \in \bar{\omega}_y.$$



Apskaičiuokime  $(A_{hx}U, V)$ , kraštinės sąlygos homogeninės. Tuomet:

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{A}_{hx}U, V) &= \sum_{j=0}^{J_y} c_j \left( \sum_{i=1}^{J_{x1}-1} (A_{hx}U)_{ij} V_{ij} h_x + \sum_{i=J_{x2}+1}^{J_x-1} (A_{hx}U)_{ij} V_{ij} h_x \right) h_y \\
 &+ Y \left( \frac{1}{h_x} (-S_h(U_{J_{x1}-1, \cdot}) + 2U_{J_{x1},0} - U_{J_{x1}+1,0}) V_{J_{x1},0} + \sum_{i=J_{x1}+1}^{J_{x2}-1} (A_{hx}U)_{i0} V_{i0} h_x \right. \\
 &\left. + \frac{1}{h_x} (-S_h(U_{J_{x2}+1, \cdot}) + 2U_{J_{x2},0} - U_{J_{x2}-1,0}) V_{J_{x2},0} \right) \\
 &= \sum_{j=0}^{J_y} c_j \left( \sum_{i=1}^{J_{x1}} \partial_x U_{ij} \partial_x V_{ij} h_x + \sum_{i=J_{x2}+1}^{J_x} \partial_x U_{ij} \partial_x V_{ij} h_x \right) h_y \\
 &+ Y \sum_{i=J_{x1}+1}^{J_{x2}} \partial_x U_{i0} \partial_x V_{i0} h_x.
 \end{aligned}$$

Taigi,  $A_{hx}$  yra simetrinis ir neneigiamas. Teigiamumas seka iš operatorių neneigiamumo su tokiomis kraštinėmis sąlygomis.

Pasinaudodami 3 lema, stabilumą galime įrodyti energetinėje normoje.

**4 lema.** Jei  $U^n$  yra ADI schemos sprendinys, tai

$$\|(I + \frac{\tau}{2} \mathcal{A}_2^h)U^n\| \leq \|(I + \frac{\tau}{2} \mathcal{A}_2^h)U^0\|.$$

**7 lentelė.** Paklaidos  $e(\delta)$ , Crank-Nicolson su skirtingomis  $\delta$  reikšmėmis.

$$\tau = 0,004, h_x = h_y = 0,004$$

	$\delta = 0.8$	$\delta = 0.6$	$\delta = 0.4$	$\delta = 0.3$
$e(\delta)$	$5.7695 \times 10^{-3}$	$2.0002 \times 10^{-2}$	$7.3100 \times 10^{-2}$	$1.4255 \times 10^{-1}$

## 7. BURA-BRASIL, dalinai sumažinta dimensija

Spręskime uždavinį

$$(A_h - dI_h)V = F,$$

Kur  $\text{const} = d \leq 0$ ,  $V, F \in D_h$ . Nehomogeninės kraštinės sąlygos įdėtos į  $F$ . Pritaikykime neiteratyvų algoritmą. Užrašykime vektorių  $V$  pavidalu

$$V_{ij} = \begin{cases} W_{ij}^L + V_{J_{x1},0} U_{ij}^L, & 0 < i < J_{x1}, \quad 0 \leq j \leq J_y, \\ V_{i0}, & J_{x1} \leq i \leq J_{x2}, \\ W_{ij}^R + V_{J_{x2},0} U_{ij}^R, & J_{x2} < i < J_x, \quad 0 \leq j \leq J_y, \end{cases}$$

Kur  $W^{L,R}$  randame iš

$$(A_h - dI_h)W^{L,R} = F^{L,R}$$

Kraštinės sąlygos yra homogeninės

$$W_{0j}^L = 0, \quad W_{J_{x1},j}^L = 0, \quad W_{J_{x2},j}^R = 0, \quad W_{J_x,j}^R = 0, \quad 0 \leq j \leq J_y,$$

Taigi galime naudoti FFT.

$U^{L,R}$  randame iš

$$(A_h - dI_h)U^L = 0, \quad (x_i, y_j) \in \omega_{x1} \times \bar{\omega}_y,$$
$$U_{0j}^L = 0, \quad U_{J_{x1},j}^L = 1, \quad 0 \leq j \leq J_y,$$

ir

$$(A_h - dI_h)U^R = 0, \quad (x_i, y_j) \in \omega_{x2} \times \bar{\omega}_y,$$
$$U_{J_{x2},j}^R = 1, \quad U_{J_x,j}^R = 0, \quad 0 \leq j \leq J_y.$$

$U^{L,R}$  tenkina sąlygas

$$U_{ij}^L = u_i^L, \quad (x_i, y_j) \in \bar{\omega}_{x1} \times \bar{\omega}_y,$$

$$U_{ij}^R = u_i^R, \quad (x_i, y_j) \in \bar{\omega}_{x2} \times \bar{\omega}_y,$$

Kur  $u^{L,R}$  vienos dimensijos vektoriai (pagal  $x$ ). Šios funkcijos randamos iš

$$(A_{hx} - dI_h)u^L = 0, \quad x_i \in \omega_{x1}$$

$$u_0^L = 0, \quad u_{J_{x1}}^L = 1,$$

ir

$$(A_{hx} - dI_h)u^R = 0, \quad x_i \in \omega_{x2},$$

$$u_{J_{x2}}^R = 1, \quad u_{J_x}^R = 0.$$

Sprendinys tinkle  $\bar{w}_{x3}$ :

$$(A_{hx} - dI_h)V = F, \quad J_{x1} < i < J_{x2},$$

$$\left( \frac{1}{h_x^2} (2 - u_{i-1}^L) - d \right) V_{i0} - \frac{1}{h_x^2} V_{i+1,0} = F_{i0} + \frac{1}{h_x^2} S_h(W_{i-1}^L), \quad i = J_{x1},$$

$$\left( \frac{1}{h_x^2} (2 - u_{i+1}^L) - d \right) V_{i0} - \frac{1}{h_x^2} V_{i-1,0} = F_{i0} + \frac{1}{h_x^2} S_h(W_{i+1}^L), \quad i = J_{x2}.$$

Tiesinių lygčių sistema gali būti efektyviai sprendžiama klasikiniu algoritmu. Kai  $V_{J_{x1},0}$ ,  $V_{J_{x2},0}$  yra žinomi, likusi sprendinio  $V$  dalis skaičiuojama išreikštiniu būdu.

Crank–Nicolson schema, dalinai sumažinta dimensija, žingsniai  $\tau = 0.004$ ,  
 $h_x = h_y = 0.004$ .

**8 Lentelė.** Paklaidos  $\tilde{e}$  ( $d$ ). Dalinai sumažintos dimensijos uždavinys, kai  $\alpha = \frac{3}{4}$ .

	$\delta = 0.8$	$\delta = 0.6$	$\delta = 0.4$	$\delta = 0.3$
$\tilde{e}(\delta)$	$6.151 \times 10^{-3}$	$1.909 \times 10^{-2}$	$6.889 \times 10^{-2}$	$1.362 \times 10^{-1}$