Naujas algebrinis metodas Caputo $\left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/n)}\right)^{k}$-tipo trupmeninės eilės diferencialinių lygčių sprendimui

dr. Inga Telksnienė
Vadovas: prof. habil. dr. Raimondas Čiegis

LMT podoktorantūros stažuotė
Matematinio modeliavimo katedra
VILNIUS TECH

Caputo trupmeninės eilės išvestinė

Caputo α-osios eilės ($\alpha > 0$) išvestinės apibrėžimas (pasiūlytas 1967 m.):

$$ {}^{C}\mathrm{D}_{x}^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\lceil \alpha \rceil - \alpha\right)} \int_{0}^{x} \frac{f^{\left(\lceil \alpha \rceil\right)}(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha - \lceil \alpha \rceil + 1}} d\tau. $$

Egzistuoja daug trupmeninės eilės išvestinių apibrėžimų, tačiau Caputo pasiūlytas apibrėžimas yra vienas populiariausių.

Caputo išvestinė pasižymi **nelokalumo** savybe, t. y. priešingai nei klasikinės išvestinės, trupmeninės išvestinės reikšmė taške priklauso ne tik nuo funkcijos reikšmių to taško aplinkoje, bet ir nuo visų praeitų funkcijos reikšmių.

Trupmeninės laipsninės eilutės

Tarkime, kad išvestinės eilė yra $\alpha = \frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$. Nagrinėkime funkcijas, skleidžiamas eilutėmis su trupmeniniais laipsniais:

Caputo trupmeninės laipsninės eilutės

$$f(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \gamma_j x^{\frac{j}{n}} = \sum_{j=0}^{+\infty} v_j \omega_j^{(n)}, \quad \omega_j^{(n)} = \frac{x^{\frac{j}{n}}}{\Gamma\left(1 + \frac{j}{n}\right)}.$$

Caputo algebra

Caputo trupmeninių laipsninių eilučių aibė ${}^{C}\mathbb{F}_n$ su standartinėmis sudėties, daugybos iš skaliaro ir sandaugos operacijomis sudaro Caputo algebrą virš $\mathbb{C}$: ${}^{C}\mathcal{F}_n = \langle {}^{C}\mathbb{F}_n; +, \cdot | \mathbb{C} \rangle$.

Caputo išvestinė trupmeninėms laipsninėms eilutėms

Caputo išvestinė bazinėms funkcijoms $w_j^{(n)}$

Caputo $\frac{1}{n}$-osios eilės trupmeninė išvestinė bazinėms funkcijoms $\omega_j^{(n)}$ apibrėžiama taip:

$$ {}^{C}\mathrm{D}^{\left(\frac{1}{n}\right)}\omega_j^{(n)} = \begin{cases} 0, & j = 0 \\ \omega_{j-1}^{(n)}, & j = 1, 2, \ldots \end{cases} $$

Caputo išvestinė trupmeninėms laipsninėms eilutėms

Caputo $\alpha = \frac{k}{n}$-osios eilės trupmeninė išvestinė funkcijai $f(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} v_j \omega_j^{(n)}$:

$$ \left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/n)}\right)^k f(x) = \left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/n)}\right)^k \sum_{j=0}^{+\infty} v_j \omega_j^{(n)} = \sum_{j=0}^{+\infty} v_{j+k} \omega_j^{(n)}. $$

$\left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/n)}\right)^{kn}$-tipo TDL

Pirmiausia nagrinėkime specialią trupmeninių diferencialinių lygčių (TDL) klasę:

$$\left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/n)}\right)^{kn} y = Q(y),$$

kur $Q(y)$ yra bet kokia analizinė funkcija.

Pastaba: $\left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/n)}\right)^{kn} \neq \frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}x^k}$. TDL sprendinių aibė yra platesnė nei atitinkamos k-tosios eilės paprastosios diferencialinės lygties (PDL) sprendinių aibė.

$\left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/n)}\right)^{kn}$-tipo TDL redukavimas į PDL (atvejis $k=1$)

Nagrinėkime atvejį $k=1$:

$$\left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/n)}\right)^{n} y = Q(y);$$

$$y(0) = v_0, \quad \left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/n)}\right)^{j} y\Big|_{x=0} = v_j,\ j = 1, \ldots, n-1.$$

Naudojant transformaciją $t = \sqrt[n]{x}$ ir $\widehat{y}(t) = y(t^n)$, ši TDL redukuojama į pirmos eilės PDL:

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{y}}{\mathrm{d}t} = nt^{n-1} Q\left(\widehat{y}\right) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{jv_j}{\Gamma\left(1+\frac{j}{n}\right)} t^{j-1};$$

$$\widehat{y}(0) = v_0.$$

$\left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/n)}\right)^{kn}$-tipo TDL redukavimas į PDL (atvejis $k = 2$)

Nagrinėkime atvejį $k = 2$:

$$\left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/n)}\right)^{2n} y = Q(y);$$

$$y(0) = v_0, \quad \left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/n)}\right)^{j} y\bigg|_{x=0} = v_j,\ j = 1, \ldots, 2n-1.$$

Naudojant $t = \sqrt[n]{x}$, $\widehat{y}(t) = y(t^n)$ ir $c_j = \frac{v_j}{\Gamma(1+j/n)}$, ši lygtis redukuojama į antros eilės PDL:

$$\frac{1}{n^2 t^{2n-2}} \left(\frac{\mathrm{d}^2 \widehat{y}}{\mathrm{d}t^2} - \sum_{j=2}^{2n-1} j(j-1) c_j t^{j-2} \right) - \frac{n-1}{n^2 t^{2n-1}} \left(\frac{\mathrm{d}\widehat{y}}{\mathrm{d}t} - \sum_{j=1}^{2n-1} j c_j t^{j-1} \right) = Q\left(\widehat{y}\right);$$

$$\widehat{y}(0) = v_0,\ \frac{\mathrm{d}\widehat{y}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} = c_1.$$

$\left({}^C\mathrm{D}^{(1/n)}\right)^{kn}$-tipo TDL redukavimas į PDL (bendrasis atvejis)

Šias transformacijas galima apibendrinti. Nagrinėkime:

$$\left({}^C\mathrm{D}^{(1/n)}\right)^{kn} y = Q(y);$$

$$y(0) = v_0, \quad \left({}^C\mathrm{D}^{(1/n)}\right)^{j} y\Big|_{x=0} = v_j,\, j = 1, \ldots, kn-1.$$

Šią TDL galima transformuoti į k-tosios eilės PDL, naudojant $t = \sqrt[n]{x}$:

$$\frac{\mathrm{d}^k \widehat{y}}{\mathrm{d}t^k} = \mathcal{F}\left(t, \widehat{y}, \frac{\mathrm{d}\widehat{y}}{\mathrm{d}t}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{k-1}\widehat{y}}{\mathrm{d}t^{k-1}}, v_1, \ldots, v_{kn-1}\right);$$

$$\widehat{y}(0) = v_0,\, \frac{\mathrm{d}^p \widehat{y}}{\mathrm{d}t^p}\Big|_{t=0} = c_p,\, p = 1, \ldots, k-1.$$

$\left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/n)}\right)^{k}$-tipo TDL (1)

Pagrindinis šio tyrimo tikslas yra spręsti TDL, turinčias tokią formą:

$$\left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/n)}\right)^{k} y = F(x, y);$$

$$y(0) = \gamma_0, \quad \left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/n)}\right)^{j} y\bigg|_{x=0} = \gamma_j, \ j = 1, \dots, k-1.$$

Sprendinio konstravimo procesas priklauso nuo k, n ir funkcijos F formos. Detaliai ištirsime šią netiesinę TDL:

$$\left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/3)}\right)^{2} y = a_0 + a_1 y + a_2 y^2;$$

$$y(0) = \gamma_0; \quad {}^{C}\mathrm{D}^{(1/3)} y\bigg|_{x=0} = \gamma_1.$$

$\left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/n)}\right)^{k}$-tipo TDL (2)

Nagrinėkime šiuos du Koši uždavinius:

$$\left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/3)}\right)^{2} y_1 = a_0 + a_1 y_1 + a_2 y_1^2,$$

$$y_1(0) = \gamma_0; \quad {}^{C}\mathrm{D}^{(1/3)} y_1 \Big|_{x=0} = \gamma_1.$$

$$\left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/3)}\right)^{6} y_2 = d_0 + d_1 y_2 + d_2 y_2^2 + d_3 y_2^3 + d_4 y_2^4 + u_y^{(3)}(x),$$

$$y_2(0) = v_0; \quad \left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/3)}\right)^{j} y_2 \Big|_{x=0} = v_j,\ j = 1, \ldots, 5.$$

Čia $a_k, d_l\ (k = 0, 1, 2; l = 0, \ldots, 4) \in \mathbb{R}$, $u_y^{(3)}(x)$ yra trupmeninė laipsninė eilutė $u_y^{(3)}(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \kappa_j \omega_j^{(3)}$, $\kappa_j \in \mathbb{R}$.

$\left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/n)}\right)^{k}$-tipo TDL (3)

Abu Koši uždaviniai turi tą patį sprendinį $y_1 = y_2 = y = \sum_{j=0}^{+\infty} \gamma_j w_j^{(3)}$, jei galioja tam tikri sąryšiai. Pradinės sąlygos susiejamos tokiu būdu:

$$
\begin{aligned}
v_0 &= \gamma_0;\\
v_1 &= \gamma_1;\\
v_2 &= a_0 + a_1 v_0 + a_2 v_0^2;\\
v_k &= a_1 v_{k-2} + a_2 \left(\sum_{s=0}^{k-2} \binom{\frac{k-2}{3}}{\frac{s}{3}} v_s v_{k-2-s} \right), \quad k = 3, 4, 5.
\end{aligned}
$$

$\left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/n)}\right)^k$-tipo TDL (4)

Taip pat, $\left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/3)}\right)^6$-tipo TDL parametrai (d_k) turi būti susieti su pradinės lygties parametrais (a_k):

$$
\begin{aligned}
d_0 &= 2a_0^2 a_2 + a_0 a_1^2 + 8a_0 a_1 a_2 + 4a_0 a_2^2 \\
d_1 &= 8a_0 a_1 a_2 + 16a_0 a_2^2 + a_1^3 + 8a_1^2 a_2 + 4a_1 a_2^2 \\
d_2 &= 8a_0 a_2^2 + 7a_1^2 a_2 + 24a_1 a_2^2 + 4a_2^3 \\
d_3 &= 12a_1 a_2^2 + 16a_2^3 \\
d_4 &= 6a_2^3
\end{aligned}
$$

Papildomas narys $u_y^{(3)}(x)$ išreiškiamas begaline trupmenine laipsnine eilute, kurios koeficientai nutatomi iš žinomų rekurentinių sąryšių, gautų transformacijos eigoje.

$\left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/n)}\right)^{k}$-tipo TDL sprendimo schema (1)

Bendra metodologija $\left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/n)}\right)^{k} y = F(x,y)$ sprendimui:

1. **Transformuojame į $\left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/n)}\right)^{kn}$-tipo TDL:**
   Konvertuojame pradinę $\left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/n)}\right)^{k}$-tipo TDL į ekvivalenčią $\left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/n)}\right)^{kn}$-tipo TDL: $\left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/n)}\right)^{kn} y = G(x,y) + u_y^{(k)}(x)$.
2. **Aproksimuojame liekamąjį narį:**
   Aproksimuojame begalinę eilutę $u_y^{(k)}(x)$, pavyzdžiui, imdami tik baigtinį jos narių skaičių.
3. **Redukuojame į PDL:**
   Transformuojame aproksimuotą $\left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/n)}\right)^{kn}$-tipo TDL į k-tos eilės PDL funkcijos $\widehat{y}(t)$ atžvilgiu naudojant keitinį $t = \sqrt[n]{x}$.

$\left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/n)}\right)^{k}$-tipo TDL sprendimo schema (2)

4. **Sprendžiame PDL:**
   Išsprendžiame gautą k-tos eilės PDL naudojant klasikinius skaitinius ar analitinius metodus.

5. **Grįžtame prie originalios lygties sprendinio:**
   Gauname galutinį apytikslį pradinės $\left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/n)}\right)^{k}$-tipo TDL sprendinį naudojant atvirkštinį keitinį: $y(x) = \widehat{y}(\sqrt[n]{x})$.

Pavyzdys: Rikati $\left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/3)}\right)^2$-tipo TDL (1)

Nagrinėkime šį Koši uždavinį:

$$\left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/3)}\right)^2 y = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}y^2$$

$$y(0) = \gamma_0 = \frac{1}{10}; \quad {}^{C}\mathrm{D}^{(1/3)}y\Big|_{x=0} = \gamma_1 = 0.$$

Pavyzdys: Rikati $\left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/3)}\right)^2$-tipo TDL (2)

Pritaikę transformaciją, gauname $\left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/3)}\right)^6$-tipo TDL:

$$\left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/3)}\right)^6 y = -\frac{4}{9} + \frac{1}{12}y + \frac{13}{12}y^2 + \frac{5}{8}y^3 + \frac{3}{32}y^4 + u_y^{(3)}(x),$$

su pradinėmis sąlygomis:

$$v_0 = \tfrac{1}{10}, \quad v_1 = 0, \quad v_2 = -\tfrac{337}{1200}, \quad v_3 = 0, \quad v_4 = -\tfrac{3707}{24000}, \quad v_5 = 0.$$

Begalinės trupmeninės laipsninės eilutės nario $u_y^{(3)}(x)$ koeficientai pateikiami rekurentiniais sąryšiais.

Pavyzdys: Rikati $\left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/3)}\right)^2$-tipo TDL (3)

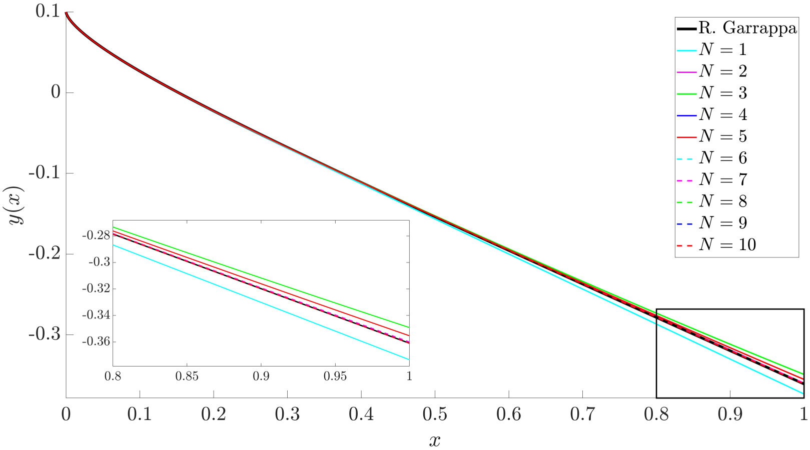
Naudojant $t = \sqrt[3]{x}$ ir aproksimuojant $u_y^{(3)}(t^3) \approx \sum_{j=0}^{N} \kappa_j \frac{t^j}{\Gamma(1+j/3)}$, $\left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/3)}\right)^6$-tipo TDL redukuojama į antros eilės PDL:

$$
\begin{aligned}
& t\,\frac{\mathrm{d}^2\widetilde{y}}{\mathrm{d}t^2} - 2\,\frac{\mathrm{d}\widetilde{y}}{\mathrm{d}t} - \frac{337t}{600\Gamma(5/3)} + \frac{3707t^3}{6000\Gamma(7/3)} \\
& = 9t^5\left(-\frac{4}{9} + \frac{\widetilde{y}}{12} + \frac{13\widetilde{y}^2}{12} + \frac{5\widetilde{y}^3}{8} + \frac{3\widetilde{y}^4}{32} + \sum_{j=0}^{N}\kappa_j\frac{t^j}{\Gamma(1+j/3)}\right);
\end{aligned}
$$

$$
\widetilde{y}(0) = \frac{1}{10}; \quad \left.\frac{\mathrm{d}\widetilde{y}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0.
$$

Galutinis apytikslis pradinės $\left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/3)}\right)^2$-tipo TDL sprendinys gaunamas pritaikius $y(x) \approx \widetilde{y}(\sqrt[3]{x})$. Bendruoju atveju, didėjant N, paklaida tarp gautojo apytiksliojo ir tikrojo sprendinio mažėja.

Pavyzdys: Rikati $\left({}^{C}D^{(1/3)}\right)^2$-tipo TDL (4)



pav.: Sprendiniai prie įvairių N reikšmių, palyginti su Garrappa skaitiniu TDL sprendimo metodu.

Išvados

1. $\left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/n)}\right)^{k}$-tipo TDL gali būti transformuotos ¿ ekvivalenčias $\left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/n)}\right)^{kn}$-tipo TDL.
2. Ši transformacija ¿veda liekamąj¿ nar¿ $u_y^{(k)}(x)$ – begalinę trupmeninę laipsninę eilutę, kurią reikia aproksimuoti.
3. Gauta $\left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/n)}\right)^{kn}$-tipo TDL gali būti redukuota ¿ k-tosios eilės PDL naudojant netiesinę laiko transformaciją $t = \sqrt[n]{x}$.
4. Tai leidžia naudoti standartinius PDL sprendimo metodus (analitinius ar skaitinius) apytiksliams pradinės $\left({}^{C}\mathrm{D}^{(1/n)}\right)^{k}$ TDL sprendiniams rasti.
5. Galutinio TDL sprendinio tikslumas priklauso nuo liekamojo nario $u_y^{(k)}(x)$ aproksimacijos tikslumo ir PDL sprendimo metodo tikslumo.

Ačiū už dėmesį!