

MATEMATINIAI MODELIAI APLINK MUS – KALĖDINIAI POKALBIAI

R. Čiegis

Vilniaus Gedimino technikos universitetas
e-mail: rc@vgtu.lt

Gruodžio 7 d., 2021, Vilnius

Kalėdos jau artėja – laukiame, svajojame, prisimename ir planuojame (prognozuojame?).

Atrandame vis daugiau laiko žaismingiems (t.y. nedarbiniais, vadinasi **darbiniais ne**) susitikimams, pokalbiams. Šiandien pamirškime universitetą ir pakalbėkime apie **matematinis modelius apink mus**.

Kalėdos jau artėja – laukiame, svajojame, prisimename ir planuojame (prognozuojame?).

Atrandame vis daugiau laiko žaismingiems (t.y. nedarbiniais, vadinasi **darbiniams ne**) susitikimams, pokalbiams. Šiandien pamirškime universitetą ir pakalbėkime apie **matematinis modelius apink mus**.

Na va, ir vėl ...

Panašu į MTM studijų programos reikalus? Bet šį kartą **tikrai, tikrai** jokių rimtų uždavinių nespręsimė.

Kalėdos jau artėja – laukiame, svajojame, prisimename ir planuojame (prognozuojame?).

Atrandame vis daugiau laiko žaismingiems (t.y. nedarbiniais, vadinasi **darbiniams ne**) susitikimams, pokalbiams. Šiandien pamirškime universitetą ir pakalbėkime apie **matematinis modelius apink mus**.

Na va, ir vėl ...

Panašu į MTM studijų programos reikalus? Bet šį kartą **tikrai, tikrai** jokių rimtų uždavinių nespręsimė.

Teisingiau uždaviniai, kuriuos aptarsime, yra labai netrivialūs ir sudėtingi, bet pokalbio nuotaikos bus kalėdinės.

Kalėdos jau artėja – laukiame, svajojame, prisimename ir planuojame (prognozuojame?).

Atrandame vis daugiau laiko žaismingiems (t.y. nedarbiniams, vadinasi **darbiniams ne**) susitikimams, pokalbiams. Šiandien pamirškime universitetą ir pakalbėkime apie **matematinis modelius apink mus**.

Na va, ir vėl ...

Panašu į MTM studijų programos reikalus? Bet šį kartą **tikrai, tikrai** jokių rimtų uždavinių nespręsimė.

Teisingiau uždaviniai, kuriuos aptarsime, yra labai netrivialūs ir sudėtingi, bet pokalbio nuotaikos bus kalėdinės.

O gal kuris nors seminaro dalyvis juos ir išspręs? **Kalėdos stebukly metas!**

Kaip ir žadėjau, paseksiu pasaką, kurią prieš kelias savaites perskaičiau vaikiškoje knygutėje (o gal ir ne vaikiškoje, ir net ne knygoje, bet argi tai svarbu?)

Kaip ir žadėjau, paseksiu pasaką, kurią prieš kelias savaites perskaičiau vaikiškoje knygutėje (o gal ir ne vaikiškoje, ir net ne knygoje, bet argi tai svarbu?)

Visos pasakos prasideda vienodai:

Vieną kartą gyveno ...



O taip, tai Mikė Pūkuotukas su geriausiu draugu paršeliu Knysliuku.
Jie mus lydi nuo pat vaikystės.
Šį kartą Mikė Pūkuotukas sugalvojo ...

O taip, tai Mikė Pūkuotukas su geriausiu draugu paršeliu Knysliuku.
Jie mus lydi nuo pat vaikystės.

Šį kartą Mikė Pūkuotukas sugalvojo ...

Šimto arų miške pasodinti stebuklingą sodą.



Kaip tarė, taip ir padarė.

Kaip tarė, taip ir padarė.

Mastershalum planting is a very difficult thing unless you know how to do it (Pooh).

To follow up the story, this achievement gave also inspiration to others.



Piglet soon decided to have his very own flower garden. He chose a species for which every single plant can simultaneously bloom many flowers of different colours and planted 18 seedlings.

Piglet soon decided to have his very own flower garden. He chose a species for which every single plant can simultaneously bloom many flowers of different colours and planted 18 seedlings.

As it turned out, in his garden one could always find either 4 plants such that any pair of them had flowers of the same colour,

or 4 plants such that no pair of them had flowers of the same colour.

O ką galvoja pesimistas **asiliukas Nulėpausis**?



Eeyore as usually was more sceptical about everything including gardening, so he tried it out in a more limited fashion.

Eeyore as usually was more sceptical about everything including gardening, so he tried it out in a more limited fashion.

He planted just **two** plants and in his garden one could always find a pair of plants that either had or hadn't flowers of the same colour.

Na, o kaip sekasi geraširdžiui Triušui ir išmintingajai Pelėdai?



Rabbit doubtlessly was very serious about all this and he decided to create a garden that would rival all other charms of Hundred Acre Wood.

In his garden there should always be

either 100 plants such that any pair of them had flowers of the same colour,

or 100 plants such that no pair of them had flowers of the same colour.

Rabbit doubtlessly was very serious about all this and he decided to create a garden that would rival all other charms of Hundred Acre Wood.

In his garden there should always be

either 100 plants such that any pair of them had flowers of the same colour,

or 100 plants such that no pair of them had flowers of the same colour.

Knowing that such an undertaking could be a Very Serious Endeavour he thought it would be good to discuss this with Owl first.

During their discussion Owl noted that Rabbit will need quite a few seedlings indeed

During their discussion Owl noted that Rabbit will need quite a few seedlings indeed

- as everybody knows then a long and boring number starting with digits **ABCDE** would certainly be sufficient.

During their discussion Owl noted that Rabbit will need quite a few seedlings indeed

- as everybody knows then a long and boring number starting with digits **ABCDE** would certainly be sufficient.

However, for the **Educated !!!**

(who, for example, know that 18 plants for Piglet's garden are **sufficient** and that Piglet does not need 20) it should be obvious that also a smaller number of seedlings

(another long and boring number, this one ending with digits **FGHIJ**) are **enough**.

Some **Very Educated** (like Vadimas or Olga) probably could suggest even a smaller number.

However, given Rabbit's enthusiasm and availability of help from his friends and relations, it probably will be faster for him to plant as many seedlings as Owl has said rather than to find out first **EXACTLY** how many he might need.

Bet tai Kalėdinė pasaka, o kokios šventės be dovanėlių visiems geriems vaikams ir jų draugams.

Bet tai Kalėdinė pasaka, o kokios šventės be dovanėlių visiems geriems vaikams ir jų draugams.

Kur jos paslėptos?



Net ir per Kalėdas prisiminkite matematiką,

Net ir per Kalėdas prisiminkite matematiką,
(o gal kaip tik per Kalėdas?)

Net ir per Kalėdas prisiminkite matematiką,
(o gal kaip tik per Kalėdas?)

išspręskite šios pasakos mįslę ir dovanėles rasite čia:

N 56 D(A+5).BEC E 24 (F-4)(J-1).(H-3)(I-1)G

Koks matematinis modelis čia tinka geriausiai?

Kandidatas Nr. 1 (be konkurencijos?) yra **Grafų teorija**.

Tegul sodo augalai apibrėžia grafo viršūnes. Joms suteikiame svorius – **spalvą (visų žiedų spalvų rinkinį)**.

Dvi viršūnės yra sujungtos briauna, jeigu jas atitinkantys augalai turi **bent vienos spalvos vienodus žiedus**.

Koks matematinis modelis čia tinka geriausiai?

Kandidatas Nr. 1 (be konkurencijos?) yra **Grafų teorija**.

Tegul sodo augalai apibrėžia grafo viršūnes. Joms suteikiame svorius – **spalvą (visų žiedų spalvų rinkinį)**.

Dvi viršūnės yra sujungtos briauna, jeigu jas atitinkantys augalai turi **bent vienos spalvos vienodus žiedus**.

Modelis sudarytas!

Ar tikrai tai tinkamas matematinis modelis?

Pasakos herojai, aprodydami pasodintus sodus, užmiršo mums pasakyti, kokia yra žiedų spalvų paletė.

Ar tikrai tai tinkamas matematinis modelis?

Pasakos herojai, aprodydami pasodintus sodus, užmiršo mums pasakyti, kokia yra žiedų spalvų paletė.

Taigi teks verstis be šios svarbios informacijos (išmintingoji Pelėda ir tvirtino, kad gudručiai tikrai sugalvos, kaip spręsti uždavinį be tokios pagalbos).

Perskaitykime dar kartą pasaką, tai visgi kokį atsakymą norime rasti?

Perskaitykime dar kartą pasaką, tai visgi kokį atsakymą norime rasti?

Vau, viskas yra paprasčiau (bent kol kas taip man atrodo):
nagrinėkime pilnąjį grafą, kai visos viršūnės yra sujungtos, o svoriai suteikti briaunoms

Perskaitykime dar kartą pasaką, tai visgi kokį atsakymą norime rasti?

Vau, viskas yra paprasčiau (bent kol kas taip man atrodo):
nagrinėkime pilnąjį grafą, kai visos viršūnės yra sujungtos, o svoriai suteikti briaunoms

briauna yra raudona, jeigu ji jungia dvi viršūnes, kurios atitinka augalus, turinčius vienodos spalvos žiedų,

briauna yra mėlyna, priešingu atveju.

Visi, kas sąžiningai studijavote Diskrečiosios matematikos ir kombinatorikos dalykus jau žinote, kokį uždavinį mes gavome!

Visi, kas sąžiningai studijavote Diskrečiosios matematikos ir kombinatorikos dalykus jau žinote, kokį uždavinį mes gavome!

Taip, tai garsioji Ramsey teorema:

Tarkime, kad turime du skaičius r ir b . Kiekviename, pakankamai dideliame pilnajame grafe, kurio briaunos nuspalvintos dviem spalvomis, visada galime rasti raudonos spalvos pografį (clique), turintį r viršūnių arba mėlynos spalvos pografį, turintį b viršūnių.

Visi, kas sąžiningai studijavote Diskrečiosios matematikos ir kombinatorikos dalykus jau žinote, kokį uždavinį mes gavome!

Taip, tai garsioji Ramsey teorema:

Tarkime, kad turime du skaičius r ir b . Kiekviename, pakankamai dideliame pilnajame grafe, kurio briaunos nuspalvintos dviem spalvomis, visada galime rasti raudonos spalvos pografį (clique), turintį r viršūnių arba mėlynos spalvos pografį, turintį b viršūnių.

Minimalų pilnojo grafo, turinčio tokį pografį, dydį žymėsime $R(r,b)$.

Trivialiai patikriname, kad

$$R(2, 2) = 2,$$

taigi Asiliuko sode jo teiginys tikrai yra teisingas.

Trivialiai patikriname, kad

$$R(2, 2) = 2,$$

taigi Asiliuko sode jo teiginys tikrai yra teisingas.

O ką žinome apie paršelio Knysliuko sodą. Aišku, kad išmintingoji Pelėda yra teisi,

$$R(4, 4) = 18.$$

Trivialiai patikriname, kad

$$R(2, 2) = 2,$$

taigi Asiliuko sode jo teiginys tikrai yra teisingas.

O ką žinome apie paršelio Knysliuko sodą. Aišku, kad išmintingoji Pelėda yra teisi,

$$R(4, 4) = 18.$$

Bet kaip ji tai sužinojo?

Kadangi užtenka surasti tik **pakankamąją** sąlygą, tai galime pasinaudoti tokiu gražiu ir efektyviai skaičiuojamu jvečiu

$$R(r, b) \leq R(r - 1, b) + R(r, b - 1)$$

bei trivialiais rezultatais

$$R(r, b) = R(b, r), \quad R(1, b) = 1.$$

Kadangi užtenka surasti tik **pakankamąją** sąlygą, tai galime pasinaudoti tokiu gražiu ir efektyviai skaičiuojamu įvečiu

$$R(r, b) \leq R(r - 1, b) + R(r, b - 1)$$

bei trivialiais rezultatais

$$R(r, b) = R(b, r), \quad R(1, b) = 1.$$

Tada matematinės indukcijos metodu gauname įvertį:

$$R(r, b) \leq \binom{r + b - 2}{r - 1}.$$

Patikrinkime, kokias tada rekomendacijas gauname:

$$R(2, 2) \leq 2, \quad R(4, 4) \leq 20.$$

Patikrinkime, kokias tada rekomendacijas gauname:

$$R(2, 2) \leq 2, \quad R(4, 4) \leq 20.$$

Bet kaip tik tokj skaičių išmintingoji Pelėda ir nurodė Knysliukui, kaip pirmą pakankamą sodinukų skaičių jo sode!

Patikrinkime, kokias tada rekomendacijas gauname:

$$R(2, 2) \leq 2, \quad R(4, 4) \leq 20.$$

Bet kaip tik tokj skaičių išmintingoji Pelėda ir nurodė Knysliukui, kaip pirmą pakankamą sodinukų skaičių jo sode!

Tada galime skaičiuoti, kiek medelių užteks pasodinti Triušiuksui, kad ir jo sode galiotų tvarkos sąlyga (python geras mūsų draugas):

$$R(100, 100) \leq$$

22750883079422934966181954039568885395604168260154104734000

Tikrai skaičius nuobodus, o Triušiuksui, net ir su draugų pagalba, teks gerokai padirbėti.

Patikrinkime, kokias tada rekomendacijas gauname:

$$R(2, 2) \leq 2, \quad R(4, 4) \leq 20.$$

Bet kaip tik tokj skaičių išmintingoji Pelėda ir nurodė Knysliukui, kaip pirmą pakankamą sodinukų skaičių jo sode!

Tada galime skaičiuoti, kiek medelių užteks pasodinti Triušiuksui, kad ir jo sode galiotų tvarkos sąlyga (python geras mūsų draugas):

$$R(100, 100) \leq$$

22750883079422934966181954039568885395604168260154104734000

Tikrai skaičius nuobodus, o Triušiuksui, net ir su draugų pagalba, teks gerokai padirbėti.

Na bet suradome pirmąją dalį informacijos, reikalingos mįslės įminimui

$$ABCDE = 22750$$

Miško mokykloje Pelėda draugams parodė, kaip patikslinti įvertį: jeigu abu skaičiai $R(r - 1, b)$ ir $R(r, b - 1)$ yra lyginiai, tada

$$R(r, b) \leq R(r - 1, b) + R(r, b - 1) - 1.$$

Miško mokykloje Pelėda draugams parodė, kaip patikslinti įvertį: jeigu abu skaičiai $R(r - 1, b)$ ir $R(r, b - 1)$ yra lyginiai, tada

$$R(r, b) \leq R(r - 1, b) + R(r, b - 1) - 1.$$

Pakeitimas nedidelis, patikrinkime, kokią tada gausime rekomendaciją Knysliukui:

$$R(4, 4) \leq 18.$$

Oi, kokia išmintinga Pelėda.

Miško mokykloje Pelėda draugams parodė, kaip patikslinti įvertį: jeigu abu skaičiai $R(r - 1, b)$ ir $R(r, b - 1)$ yra lyginiai, tada

$$R(r, b) \leq R(r - 1, b) + R(r, b - 1) - 1.$$

Pakeitimas nedidelis, patikrinkime, kokią tada gausime rekomendaciją Knysliukui:

$$R(4, 4) \leq 18.$$

Oi, kokia išmintinga Pelėda.

Tada ir Triušiuokui užteks pasodinti mažiau augalų:

20211620527990125271561475902929545964969009684729631749478.

Miško mokykloje Pelėda draugams parodė, kaip patikslinti įvertį: jeigu abu skaičiai $R(r - 1, b)$ ir $R(r, b - 1)$ yra lyginiai, tada

$$R(r, b) \leq R(r - 1, b) + R(r, b - 1) - 1.$$

Pakeitimas nedidelis, patikrinkime, kokią tada gausime rekomendaciją Knysliukui:

$$R(4, 4) \leq 18.$$

Oi, kokia išmintinga Pelėda.

Tada ir Triušiuokui užteks pasodinti mažiau augalų:

20211620527990125271561475902929545964969009684729631749478.

Va ir užbaigėme minti mįslę, žinome ir antrąją informacijos dalį

$$FGHIJ = 49478$$

Kelios pastabos apie Ramsey skaičius.

1. Viršutinius įverčius galima patikslinti, panaudojus šią skaičių savybę:

$$R(r, r) \leq 4R(r - 2, r) + 2.$$

Tada, pvz. gauname

$$R(100, 100) \leq$$

17402626520083937206850711522922314468253592135530590614330

Kelios pastabos apie Ramsey skaičius.

1. Viršutinius įverčius galima patikslinti, panaudojus šią skaičių savybę:

$$R(r, r) \leq 4R(r - 2, r) + 2.$$

Tada, pvz. gauname

$$R(100, 100) \leq$$

17402626520083937206850711522922314468253592135530590614330

2. Įverčius dar sumažiname, panaudodami šiuo metu žinomas tikslias Ramsey skaičių reikšmes, tada

$$R(100, 100) \leq$$

15564304203466289766361230165402196063723313152562500099974

3. Pateikiame kelias tikslias Ramsey skaičių reikšmes

$$R(3, 3) = 6, \quad R(4, 3) = 9, \quad R(4, 4) = 18,$$
$$R(5, 3) = 14, \quad R(5, 4) = 25, \quad R(6, 3) = 18.$$

Laukia savo atradėjų skaičiai (apie juos žinome tik apatinius ir viršutinius įverčius):

$$43 \leq R(5, 5) \leq 49, \quad 36 \leq R(6, 4) \leq 41.$$

Galime kartu su Vadimu organizuoti Boinc projektą, bet pabandykime įvertinti *brute force* paieškos kaštus:

a) jeigu grafas turi m viršūnių, tai briaunų spalvinimo variantų skaičius

$$S_1 = 2^{m(m-1)/2}.$$

b) turime perrinkti visas skirtingas viršūnių aibes po n viršūnių (jei ieškome $R(n, n)$):

$$S_2 = C_m^n.$$

Imkime $n = 4$ ir $m = 17$, gauname

$$S = 2^{147}.$$

Taigi būtina pasitelkti matematinis metodus.

Taigi būtina pasitelkti matematinis metodus.

DI irgi gali būti panaudotas, nes kontrapavyzdžių konstravimui (apatinių įverčių tikslinimui) perspektyvu įdarbinti optimizavimo euristicas, pvz. genetinius algoritmus.

Taigi būtina pasitelkti matematinis metodus.

DI irgi gali būti panaudotas, nes kontrapavyzdžių konstravimui (apatinių įverčių tikslinimui) perspektyvu įdarbinti optimizavimo euristicas, pvz. genetinius algoritmus.

O ar gali pagelbėti kvantiniai kompiuteriai?

Taigi būtina pasitelkti matematinis metodus.

DI irgi gali būti panaudotas, nes kontrapavyzdžių konstravimui (apatinių įverčių tikslinimui) perspektyvu įdARBINTI optimizavimo euristicas, pvz. genetinius algoritmus.

O ar gali pagelbėti kvantiniai kompiuteriai?

Bet čia jau stop, susitarėme, kad šiandien leistini tik kalėdiniai pokalbiai.

