Ką mums gali papasakoti matricų normos?

R. Čiegis

Vilniaus Gedimino technikos universitetas
e-mail: rc@vgtu.lt

Rugsėjo 14 d., 2021, Vilnius

Vektorių ir matricų normos yra vienas populiariausių matematikos įrankių. Kadangi seminare dalyvauja matematikai-profesionalai, tai tikėtina, kad esame tikri, jog mūsų žinios apie baigtinės dimensijos elementų normas yra išsamios ir paslapčių ar netikėtumų nesitikime.

Visgi padiskutuokime apie situacijas, kurios dažnai sutinkamos matemtikos taikymuose.

Daugelio taikomųjų uždavinių matematiniai modeliai po aproksimacijos yra aprašomi tiesinių lygčių sistemomis. Jeigu gauname netiesines sistemas, tai beveik visada atliekame uždavinio linearizaciją.

Nagrinėkime homogeninę tiesinių lygčių sistemą

$$\frac{dU}{dt} = AU, \ \ 0 < t \leq T, \ \ U(0) = U_0. \qquad (1)$$

Dinaminės sistemos sprendinio elgesį (asimptotiką) nulemia operatoriaus A ($n \times n$ matricos) savybės, jas vertiname pasitelkdami matricų normas.

Uždavinio (1) sprendinį galime užrašyti tokia kompaktiška forma

$$U(t) = e^{tA}\, U_0.$$

Čia eksponentė e^{tA} apibrėžia matricinę funkciją, priklausančią nuo laiko t.

Kad būtų įdomiau mūsų kolegoms, kurie jau keli metai aktyviai sprendžia uždavinius, aprašomus trupmeninio laipsnio elipsiniais operatoriais (šiuos kolegas, ne operatorius, visi pažįstame), imkime tokį eksponentės nuo matricos apibrėžimą

$$e^{tA} = I + tA + \frac{1}{2}t^2A^2 + \dots + \frac{1}{k!}t^kA^k + \cdots \ .$$

Kadangi kiekvienas laipsnių eilutės narys yra aprėžtas $\frac{1}{k!}t^k\|A\|^k$, tai laipsnių eilutė konverguoja ir teisingas įvertis

$$\|e^{tA}\| \le e^{t\|A\|}. \tag{2}$$

Puiku, gavome stabilumo įvertį. Bet, ar jis tikrai toks, kuris i šsprendžia mūsų problemas?

Prisiminkime populiariausias vektoriaus $x = (x_1, \dots, x_m)$ normas:

$$\|x\|_1 = h \sum_{j=1}^{m} |x_j|, \quad \|x\|_2 = \left(h \sum_{j=1}^{m} |x_j|^2 \right)^{1/2}, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \le j \le m} |x_j|.$$

Tada matricos A norma, suderinta su atitinkama vektoriaus norma, yra apibrėžiama taip

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le k \le m} \sum_{j=1}^{m} |a_{jk}|,$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)},$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le j \le m} \sum_{k=1}^{m} |a_{jk}|,$$

čia $\rho(A)$ yra matricos A spektrinis radiusas.

Mūsų tikslas yra įvertinti tiesinės diferencialinės lygties sprendinį

$$U(t) = e^{tA}\, U_0.$$

Pasinaudoję vektorių ir matricų normų savybėmis nesunkiai gauname tokį paprastą įvertį

$$|U(t)| = \|e^{tA}\|\, |U_0|.$$

Jo tikslumas priklauso nuo to, kiek sėkmingai galime įvertinti eksponentės normą

$$\|e^{tA}\| \le K e^{t\omega},$$

kur $K > 0$, ω yra konstantos (realieji skaičiai).

Anksčiau gautasis ¿vertis (2)

$$\|e^{tA}\| \leq e^{t\|A\|}$$

gali būti per daug pesimistinis. Imkime skaliarin¿ atvej¿, kai

$$A = -10.$$

Tada gauname sprendinio $u(t) = exp(-10t)u_0$ ¿vert¿

$$|u(t)| \leq e^{10t}u_0.$$

Imkime kitą pavyzdį, kai diferencialinių lygčių sistema aprašo dviem kryptimis vykstančias chemines reakcijas

$$W_1 \to W_2 \to W_1,$$

jų greičiai, atitinkamai, k_1 ir k_2:

$$\frac{dw_1}{dt} = -k_1 w_1 + k_2 w_2,$$
$$\frac{dw_2}{dt} = k_1 w_1 - k_2 w_2.$$

Šios sistemos matrica

$$A = \begin{pmatrix} -k_1 & k_2 \\ k_1 & -k_2 \end{pmatrix} .$$

Šios sistemos sprendinys asimptotiškai artėja prie stacionarios būsenos:

$$w_1(t) = \frac{k_1}{k_1 + k_2}(w_1(0) + w_2(0)) + \frac{e^{-(k_1+k_2)t}}{k_1 + k_2}\left(k_1 w_1(0) - k_2 w_2(0)\right),$$
$$w_2(t) = \frac{k_1}{k_1 + k_2}(w_1(0) + w_2(0)) - \frac{e^{-(k_1+k_2)t}}{k_1 + k_2}\left(k_1 w_1(0) - k_2 w_2(0)\right).$$

Apskaičiuokime matricos A normas:

$$\|A\|_1 = 2\max(|k_1|,\, |k_2|), \quad \|A\|_2 = \sqrt{2(k_1^2 + k_2^2)}, \quad \|A\|_\infty = |k_1| + |k_2|,$$

Visos matricos normos prognozuoja triukšmo eksponentinį didėjimą

$$\approx e^{ct(|k_1|+|k_2|)}.$$

Katedros mokslininkai atliko visą eilę įdomių tyrimų, kai skaitinių algoritmų stabilumą siejame su matricų A tikrinių reikšmių savybėmis (spektrinė analizė, analogiška FFT metodui).

Šioje tematikoje aktyviai dirba ir prof. M. Sapagovo vadovaujama mokslininkų grupė, jie pritaikė spektrinį metodą įdomių uždavinių su nelokaliomis kraštinėmis sąlygomis sprendimui.

Suformuluokime pagrindinius šio metodo privalumus.

1. Matrica A yra ortogonali, jei $A^T A = I$.
Tada teisingi tokie įverčiai

$$\|Av\|_2 = \|v\|_2, \quad \|A\|_2 = 1, \quad \|A^{-1}\|_2 = 1,$$
$$cond_2(A) = \|A\|_2 \, \|A^{-1}\|_2 = 1.$$

2. Matrica A yra normali, jei $AA^T = A^T A$.

Matrica A yra normali tada ir tik tada, kai ji turi pilną ortogonalių tikrinių vektorių sistemą U:

$$A = U \Lambda U^{-1},$$

čia Λ yra diagonali tikrinių reikšmių matrica.

Bendruoju atveju, tarkime, kad žinome matricos A pilną tikrinių vektorių sistemą U (nebūtinai ortogonalią). Tada gauname spektrinį įvertį

$$\|e^{tA}\| \leq \|U\| \, \|e^{t\Lambda}\| \, \|U^{-1}\| \leq cond(U) \max_{1 \leq k \leq m} |e^{t\lambda_k}|.$$

Jeigu matrica A yra normalioji, tai

$$\|e^{tA}\|_2 \leq \max_{1 \leq k \leq m} |e^{t\lambda_k}|.$$

Bendruoju atveju yra pakankamai sudėtinga gauti tikrinių vektorių matricos sąlygotumo įvertį (ši dalis dažniausiai paliekama be atsakymo)

$$cond(U) \leq K.$$

Pritaikykime spektrinį metodą cheminių reakcijų modeliui. Tada surandame matricos

$$A = \begin{pmatrix} -k_1 & k_2 \\ k_1 & -k_2 \end{pmatrix} .$$

tikrines reikšmes

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -(k_1 + k_2)$$

ir gauname įvertį

$$\|e^{tA}\| \leq cond(U).$$

Nesunku patikrinti, kad matrica A nėra normalioji, tai ir bus pirmoji namų darbų užduotis – įvertinkite matricos U sąlygotumo skaičių.

Matricos logaritminė norma

Stabilumo įverčius, kai matrica nėra normalioji, dažnai pavyksta gauti naudojant logaritminę normą

Matricos logaritminė norma

Stabilumo įverčius, kai matrica nėra normalioji, dažnai pavyksta gauti naudojant logaritminę normą

$$\mu(A) = \lim_{\tau \to +0} \frac{\|I + \tau A\| - 1}{\tau}.$$

Matricos logaritminė norma

Stabilumo įverčius, kai matrica nėra normalioji, dažnai pavyksta gauti naudojant logaritminę normą

$$\mu(A) = \lim_{\tau \to +0} \frac{\|I + \tau A\| - 1}{\tau}.$$

Pvz. 2. Apskaičiuokite skaičiaus a logaritminę normą.

Matricos logaritminė norma

Stabilumo įverčius, kai matrica nėra normalioji, dažnai pavyksta gauti naudojant logaritminę normą

$$\mu(A) = \lim_{\tau \to +0} \frac{\|I + \tau A\| - 1}{\tau}.$$

Pvz. 2. Apskaičiuokite skaičiaus a logaritminę normą.

$$\mu(a) = a.$$

Matricos logaritminė norma

Stabilumo įverčius, kai matrica nėra normalioji, dažnai pavyksta gauti naudojant logaritminę normą

$$\mu(A) = \lim_{\tau \to +0} \frac{\|I + \tau A\| - 1}{\tau}.$$

Pvz. 2. Apskaičiuokite skaičiaus a logaritminę normą.

$$\mu(a) = a.$$

Ir bendruoju atveju

$$-\|A\| \leq \mu(A) \leq \|A\|.$$

Namų darbai.

2. Įrodykite, kad $\frac{\|I+\tau A\|-1}{\tau}$ yra nemažėjanti funkcija τ atžvilgiu (todėl riba visada egzistuoja).

3. Įrodykite, kad teisinga nelygybė

$$\mu(A+B) \leq \mu(A) + \mu(B).$$

4. Įrodykite, kad teisinga nelygybė (normos tolydumas):

$$|\mu(A) - \mu(B)| \leq \|A - B\|.$$

Nagrinėjant diferencialinių lygčių ir jas aproksimuojančių schemų stabilumą, mums svarbiausia yra tokia savybė.

$$\mu(A) \leq \omega \iff \|e^{tA}\| \leq e^{t\omega} \quad \forall t > 0.$$

Nagrinėjant diferencialinių lygčių ir jas aproksimuojančių schemų stabilumą, mums svarbiausia yra tokia savybė.

$$\mu(A) \le \omega \iff \|e^{tA}\| \le e^{t\omega} \ \ \forall t > 0.$$

$$\mu_1(A) = \max_{1 \le k \le m} \Big(a_{kk} + \sum_{j=1, j \ne k}^{m} |a_{jk}| \Big),$$

$$\mu_2(A) = \max(\lambda : \ \ \lambda \in \sigma(A + A^T)),$$

$$\mu_\infty(A) = \max_{1 \le j \le m} \Big(a_{jj} + \sum_{k=1, k \ne j}^{m} |a_{jk}| \Big).$$

Nagrinėkime cheminių reakcijų uždavinį:

$$\mu_1(A) = 0 \quad \longrightarrow \quad \|e^{tA}\|_1 \le 1 \quad \forall t > 0.$$

$$\mu_\infty(A) = |k_2 - k_1| \quad \longrightarrow \quad \|e^{tA}\|_\infty \le e^{|k_2 - k_1|} \quad \forall t > 0.$$

Palyginkite dviejų matricų logaritmines normas:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Kokias išvadas ir rekomendacijas galite pateikti?