Skirtuminės schemos netiesinei elipsinei lygčiai su integraline kraštine sąlyga konvergavimas

Regimantas Čiupaila
Matematinio modeliavimo katedra

Seminaras
2023-09-19

Pranešimai konferencijose:

26th International Conference Mathematical Modelling and Analysis (MMA2023). Jurmala, Latvia, May 30 – June 2, 2023. K.Pupalaigė, R.Čiupaila, G.K.Šaltenienė, M.Sapagovas. On the convergence of the difference scheme for nonlinear elliptic equation with integral boundary condition.

64-oji Lietuvos matematikų draugijos konferencija. Birželio 21-22 d., 2023, Vilnius. K.Pupalaigė, M.Sapagovas, R.Čiupaila, G.K.Šaltenienė. Skirtuminės schemos netiesinei elipsinei lygčiai su integraline kraštine sąlyga konvergavimas

Uždavinio formulavimas

Nagrinėsime dvimatę netiesinę elipsinę lygtį su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis, priklausančiomis nuo dviejų parametrų ξ ir γ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y, u), \quad (x, y) \in \Omega = \{0 < x < 1, 0 < y < 1\}, \tag{1}$$

$$u(x, 0) = \mu_1(x), \quad u(x, 1) = \mu_2(x), \quad u(0, y) = \mu_3(y), \tag{2}$$

$$u(1, y) = \gamma \int_{\xi}^{1} u(x, y)dx + \mu_4(y), \tag{3}$$

kur $\gamma \geq 0, \quad 0 \leq \xi < 1$.

Tirsime, su kuriomis parametrų $\boldsymbol{\xi}$ ir $\boldsymbol{\gamma}$ reikšmėmis kis skirtuminio uždavinio, atitinkančio diferencialinį uždavinį (1) – (3), sistemos matricos savybės.

Turinys

- Pranešime nagrinėjamas dvimatis netiesinis elipsinis uždavinys su nelokaliosiomis sąlygomis, priklausančiomis nuo parametrų ξ ir γ.
- Tiriama, kokią įtaką šie parametrai turi tam, kad skirtuminių lygčių sistemos matrica būtų M-matrica.
- Formuluojamas skirtuminis uždavinys paklaidai tirti.
- Aptariamos M-matricų, naudojamų tyrimui, savybės.
- Skirtuminių lygčių sistemos sprendinio paklaidai vertinti konstruojama konkreti mažoruojanti funkcija, gaunamas šios paklaidos įvertis.

Turinys

- Daugeliu atvejų, nagrinėjant elipsines lygtis su nelokaliosiomis sąlygomis, skirtuminio uždavinio matrica yra charakterizuojama savybėmis, būdingomis M-matricoms.
- Tą naudojome ir ankstesniuose tyrimuose, įrodant iteracinių metodų konvergavimą tiek tiesinėms, tiek netiesinėms elipsinėms lygtims su nelokaliosiomis sąlygomis.
- Pasinaudota ankstesniais mūsų rezultatais iš M-matricų taikymo teoriniam skirtuminių lygčių sistemos tyrimui, parodant, jog M-matricų teorija galėtų būti traktuojama kaip maksimumo principo išplėtimas tuo atveju, kai skirtuminių lygčių sistemos matrica nėra diagonaliai vyraujanti.

Skirtuminis uždavinys

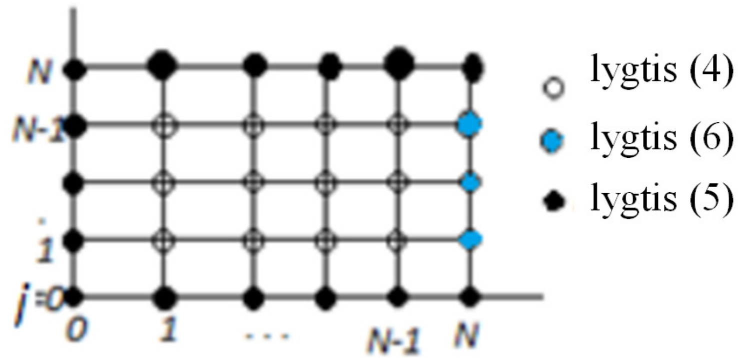
Tarus, kad diferencialinis uždavinys (1) – (3) turi vienintelį, pakankamai glodų sprendinį, o sprendinio išvestinės iki ketvirtosios eilės yra aprėžtos, sudarome skirtuminę uždavinio aproksimaciją:

$$\frac{u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1}}{h^2} = f\left(x_i, y_j, u_{ij}\right) + R_{ij}(h), \tag{4}$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, N-1;$$

$$u_{i0} = (\mu_1)_i, \quad u_{iN} = (\mu_2)_i, \quad u_{0j} = (\mu_3)_j, \quad i = 0, 1, \ldots, N, \quad j = 0, 1, \ldots, N; \tag{5}$$

$$u_{Nj} = h\gamma\left(\frac{u_{mj} + u_{Nj}}{h} + \sum_{i=m+1}^{N-1} u_{ij}\right) + (\mu_4)_j + r_{Nj}(h), \quad j = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{6}$$



Čia $h = \frac{1}{N}$, $\xi = mh$, N, m – teigiami natūralieji skaičiai.

Sistemoje (4) – (6) ***u*** yra diferencialinio uždavinio sprendinys.

Aproksimavimo paklaida

Aproksimavimo paklaidos įverčiai:

$$|R_{ij}(h)| \leq \frac{h^2}{6} M_4 ,$$

$$|R_{Nj}(h)| \leq \frac{h^2}{12} M_2 \gamma ,$$

kur

$$M_2 = max \left(\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right| \right), \ M_4 = max \left(\left| \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right|, \left| \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right| \right)$$

Skirtuminis uždavinys

$\boldsymbol{u_{ij}}$ - diferencialinio uždavinio sprendinys, $\boldsymbol{U_{ij}}$ - skirtuminio uždavinio sprendinys:

$$\frac{U_{i-1,j} - 2U_{ij} + +U_{i+1,j}}{h^2} + \frac{U_{i,j-1} - 2U_{ij} + U_{i,j+1}}{h^2} = f\left(x_i, y_j, U_{ij}\right), \quad i,j = 1,2,\ldots,N-1; \tag{7}$$

$$U_{i0} = (\mu_1)_i\,,\ U_{iN} = (\mu_2)_i\,,\ U_{0j} = (\mu_3)_j\,, \quad i = 0,1,\ldots,N,\ j = 0,1,\ldots,N; \tag{8}$$

$$U_{Nj} = h\gamma\left(\frac{U_{mj} + U_{Nj}}{h} + \sum_{i=m+1}^{N-1} U_{ij}\right) + (\mu_4)_j\,, \quad j = 1,2,\ldots,N-1. \tag{9}$$

Paklaida:

$$z_{ij} = u_{ij} - U_{ij}.$$

Skirtuminis uždavinys paklaidai

Atimdami atitinkamai (7), (8), (9) lygtis iš (4), (5), (6) lygčių, gauname:

$$\frac{z_{i-1,j} - 2z_{ij} + z_{i+1,j}}{h^2} + \frac{z_{i,j-1} - z_{ij} + z_{i,j+1}}{h^2} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} z_{ij} + R_{ij}(h), \quad i,j = 1,2,\ldots,N-1; \tag{10}$$

$$z_{i0} = z_{iN} = z_{0j} = 0, \quad i = 0,1,\ldots,N, \quad j = 0,1,\ldots,N; \tag{11}$$

$$z_{Nj} = h\gamma \left(\frac{z_{mj} + z_{Nj}}{h} + \sum_{i=m+1}^{N-1} z_{ij} \right) + R_{Nj}(h), \quad j = 1,2,\ldots,N-1. \tag{12}$$

Perėjimas prie matricinės formos

Konstruojame sprendinio paklaidos sistemos matricą. Iš nelokaliųjų sąlygų išreiškiame:

$$z_{Nj} = \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i z_{ij} + \frac{2}{1 - h\gamma} R_{Nj}(h); \qquad (13)$$

kur

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & i = 1, 2, \ldots, m-1 \\ \dfrac{h\gamma}{2 - h\gamma}, & i = m \\ \dfrac{2h\gamma}{2 - h\gamma}, & i = m+1, m+2, \ldots, N-1 \end{cases}$$

. Čia $m=\xi/h$, (pasirinkome $\xi=mh$).

Perėjimas prie matricinės formos

$$z_{Nj} = \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i z_{ij} + \frac{2}{1 - h\gamma} R_{Nj}(h) \quad (13)$$

Sąlygą (13) įstatome į (10) lygtį:

$$\frac{z_{i-1,j} - 2z_{ij} + z_{i+1,j}}{h^2} + \frac{z_{i,j-1} - z_{ij} + z_{i,j+1}}{h^2} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} z_{ij} + R_{ij}(h),$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, N-2, \;\; j = 1, 2, \ldots, N-1;$$

$$\frac{z_{N-2,j} - 2z_{N-1,j} + \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_{ij} z_{ij}}{h^2} + \frac{z_{N-1,j-1} - z_{N-1,j} + z_{N-1,j+1}}{h^2} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} z_{Nj} + R_{Nj}(h), \qquad (14)$$

$$j = 1, 2, \ldots, N-1;$$

$$z_{i0} = z_{iN} = z_{0j} = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, N, \quad j = 0, 1, \ldots, N;$$

Sistemą (14) užrašome matricine forma:

$$Az + Dz = r\,(h)$$

Matricinė forma
(*Perėjimas prie M-matricų teorijos panaudojimo*)

$$Az + Dz = r\,(h).$$

Matrica D yra diagonalinė (įstrižaininė) matrica, gauta iš skirtuminės lygties dešiniosios pusės.

Matricą A galima užrašyti:

$$A = h^{-2}\;(\Lambda_x + C + \Lambda_y)\;,$$

Toliau apibrėšime matricas Λ_x, C, Λ_y.

Matricinė forma

Matricos Λ_x *ir* Λ_y yra blokinės matricos, atitinkančios antrosios eilės dalines išvestines pagal *x* ir *y* atitinkamai, o matrica *C* yra blokinė matrica gaunama iš nelokaliųjų sąlygų:

ir

$$\Lambda_x = \begin{pmatrix} \Lambda_o & & & \\ & \Lambda_o & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Lambda_o \end{pmatrix}, \quad \Lambda_y = \begin{pmatrix} 2I & -I & & & \\ -I & 2I & -I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -I & 2I \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 & & & \\ & C_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_o = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{N-1} \end{pmatrix}$$

Matricos *I* ir C_1 yra *(N-1)* eilės, o matricos Λ_x, *C*, Λ_y yra eilės $(N-1)^2$.

$$A = h^{-2}\,(\Lambda_x + C + \Lambda_y)$$

M-matricos

Matricos A elementai tenkina sąlygas:

$a_{ii}>0$ – diagonaliniai elementai,

$a_{ij}\leq 0$, $i\neq j$ – nediagonaliniai elementai.

Apibrėžimas.

Realioji kvadratinė matrica $A = \{a_{kl}\}$, $k, l = 1, 2, \ldots, n$, kur $a_{kl}\leq 0$ visiems $k\neq l$ yra vadinama **M-matrica**, jei A^{-1} yra nesinguliari ir visi A^{-1} elementai yra neneigiami.

Jei M-matricos sąlygos yra išpildytos, tai šios dvi savybės yra ekvivalenčios:

1) A^{-1} egzistuoja ir $A^{-1}\geq 0$;

2) matricos A tikrinių reikšmių realiosios dalys yra teigiamos.

Jei $h\gamma < 1$, tai mūsų nagrinėjamo uždavinio matricos A diagonaliniai elementai yra teigiami. Nediagonaliniai matricos A elementai visada yra neteigiami.

M-matricos

Toliau tirsime sprendinio paklaidos įverčius. Tam vėl grįšime prie matricinės skirtuminių lygčių sistemos formos. Parodysime, kad sistemos matrica *A* yra M-matrica.

Paklaidai $z_{ij} = u_{ij} - U_{ij}$

matricinė lygčių sistemos forma yra $Az + Dz = r\,(h)$.

Čia *D* yra diagonalinė matrica: $D = \{d_{ij}\}$, $d_{ij} \geq 0$, $|r_{ij}\,(h)| \leq R_{ij}\,(h)$.

Dar kartą aptarsime matricos *A* savybes:

$$a_{ii} > 0,$$
$$a_{ij} \leq 0,\ i \neq j,$$
$$\lambda(A) > 0.$$

Pirmoji ir antroji savybės autorių aptartos ankstesnėse publikacijose.

[K. Pupalaigė, M. Sapagovas, R. Čiupaila, Math. Mod. Anal., 2022 ir kt.]

Iš jų išplaukia teiginių ekvivalentumas: $Re\ \lambda(A) > 0 \iff A^{-1} \geq 0$.

M-matricos

Aspektai, susiję su trečiuoju požymiu $\lambda(A) > 0$ tirti ir kitų autorių (A.Štikonas et al). Nagrinėti spektro struktūros vienmačiams diferencialiniams uždaviniams klausimai ir su jais susiję tikrinių reikšmių skirtuminiai uždaviniai.

Mūsų nagrinėtas uždavinys

$$u'' + \lambda u = 0, \quad x \in (0,1)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = \gamma \int_{\xi}^{1} u dx$$

[K. Pupalaigė, M. Sapagovas, R. Čiupaila, Math. Mod. Anal., 2022]

M-matricos

- Minimame straipsnyje parodyta, kad
  - Jei *ξ, γ* – realūs, tai *λ* – realios
  - Jei $\gamma = \frac{1}{1-\xi^2}$, tai visos $\lambda > 0$
  - $\exists\, \lambda < 0$ tada ir tik tada, kai $\gamma > \frac{1}{1-\xi^2}$, t. y., kai γ yra didelis skaičius

Šiame pranešime tiriamas skirtuminio uždavinio spektras dvimačio elipsinio uždavinio atveju, norint nustatyti, kaip yra susiję koeficientai $\boldsymbol{\gamma}$ ir $\boldsymbol{\xi}$, kad matrica *A* būtų M-matrica.

M-matricos

- **Teorema**

Bet kuriai reikšmei $\xi_0 \in [0, 1)$ egzistuoja $\gamma_1 > 0$, tokia, kad visoms reikšmėms $\gamma \in [0, \gamma_1]$ visos matricos A tikrinės reikšmės yra teigiamos:

$$\lambda(A) > 0$$

$$\gamma_1 = f(\beta_0, \xi_0) = \frac{2}{h} \tanh\left(\frac{\beta_0 h}{2}\right) \frac{\sinh(\beta_0)}{\cosh(\beta_0) - \cosh(\beta_0 \xi_0)}$$

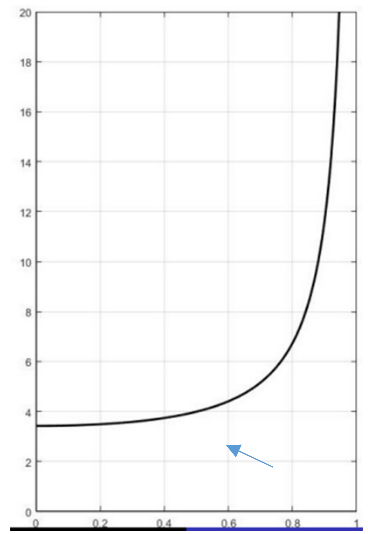
$$\beta_0 = \frac{2}{h} ln \left(\sin \frac{\pi h}{2} + \sqrt{\sin^2 \frac{\pi h}{2} + 1} \right)$$

- Išvada.

Jei $0 \leq \gamma \leq \gamma_1$, tai matrica A yra M-matrica.

Kadangi $\gamma_1 \rightarrow \infty$, kai $\xi_0 \rightarrow 1$, tai kiekvienai kaip norima didelei γ reikšmei galima rasti tokią reikšmę ξ_0 (pakankamai artimą 1), kad visos $\lambda(A) > 0$.

Formulės γ_1 apskaičiuoti išvestos minėtame autorių straipsnyje. Vaizdžiau galima tai pastebėti iš pateikiamo funkcijos $\gamma_1 = f(\xi_0)$ grafiko ($\beta_0 \approx \pi$, kai h yra pakankamai mažas). Jei γ yra žemiau kreivės, tai sistemos matrica yra M-matrica.



M-matricos

- Performuluosime Teoremos teiginį, atsižvelgdami į grafiką:

Kiekvienai reikšmei ξ_0 *∈ [0, 1]* egzistuoja tokia reikšmė γ_1 , kad visos $\lambda(A) > 0$.

Kai ξ_0 yra artima *1*, ($u(1) = \gamma\int_1^1 u(x, y)\, dx = 0$), nelokali sąlyga virsta į *Dirichlet* sąlygą.

Tyrimo tikslas yra įvertinti paklaidą $|z_{ij}| < ?$, kai yra įtraukiamos nelokaliosios sąlygos.

Priminsime teiginį, baigtinių skirtumų metodo teorijoje paprastai vadinamą palyginimo teorema.

Pagal šią teoremą gali būti sukonstruota mažoruojanti funkcija, kuria pasinaudojus yra įvertinama paklaida.

Palyginimo teorema

Palyginimo teorema.

Tegu u ir w yra dviejų sistemų sprendiniai:

$$(A + D)u = f$$

$$Aw = g,\ g > 0,$$

kur A yra M-matrica, $D = \{d_{ij}\}$ yra diagonalinė matrica, $d_{ij} \geq 0$. Jei $|f| \leq g$, tai $|u| \leq w$.

Pastaba.

$$f = \{f_{ij}\},\ i, j = 1, \ldots, N-1;\ g = \{g_{ij}\}.\ |f| < |g| \Leftrightarrow |f_{ij}| \leq |g_{ij}|.$$

Įrodymas.

Kadangi $\boldsymbol{A^{-1} \geq 0}$, tai $|\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{A^{-1} f}| \leq |\boldsymbol{A^{-1}}|\,|\boldsymbol{f}| \leq \boldsymbol{A^{-1}}|\boldsymbol{f}| \leq \boldsymbol{A^{-1} g = w}.$

[M.Sapagovas, O.Štikonienė, K.Jakubėlienė, R.Čiupaila. Finite difference method for boundary value problem for nonlinear elliptic equation with nonlocal conditions. Boundary value problems. London : Springer, 2019]

Mažoruojančios funkcijos konstravimas

- Pastaba:
  - Palyginimo teorema visada buvo pateikiama, kaip maksimumo principo išvada.
  - Maksimumo principas formuluojamas skirtuminių lygčių sistemos matricoms, turinčioms šias savybes:
    - $a_{ii}>0$,
    - $a_{ij} < 0, i \neq j$,
    - $a_{ii} > \sum |a_{ij}|$ (diagonalaus vyravimo savybė – pakankamai stiprus apribojimas)
  - M-matricos nereikalauja diagonalinio vyravimo. Pakanka, kad $A^{-1} \geq 0$.
- Tolesnė tyrimo užduotis – mažoruojančios funkcijos konstravimas.
- Paprastai mažoruojanti funkcija – tai antros eilės daugianaris su kintamaisiais *x* ir *y*. Tokia konstrukcija yra patogi, nėra paklaidos aproksimuojant antrosios eilės išvestines.

Mažoruojančios funkcijos konstravimas

Grįžkime prie skirtuminio uždavinio paklaidai:

$$\frac{z_{i-1,j} - 2z_{ij} + z_{i+1,j}}{h^2} + \frac{z_{i,j-1} - z_{ij} + z_{i,j+1}}{h^2} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} z_{ij} + R_{ij}(h), \quad i, j = 1, 2, \ldots, N-1; \tag{10}$$

$$z_{i0} = z_{iN} = z_{0j} = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, N, \quad j = 0, 1, \ldots, N; \tag{11}$$

$$z_{Nj} = h\gamma \left(\frac{z_{mj} + z_{Nj}}{h} + \sum_{i=m+1}^{N-1} z_{ij} \right) + R_{Nj}(h), \quad j = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{12}$$

Lygtyje (10): $|R_{ij}(h)| \leq \dfrac{h^2 M_4}{6}, \ |R_{Nj}(h)| \leq \dfrac{h^2 M_2}{12}\gamma$

Pasirinkę $M = max(M_2, M_4)$, turime $\dfrac{h^2 M(1+\gamma)}{6} > |R_{ij}(h)|, |R_{Nj}(h)|,$

konstruojame funkciją $w(x, y)$: $w(x,y) = \dfrac{h^2 M(1+\gamma)}{6} \left(K - \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 + ax \right).$ (15)

Funkcija w(x, y) yra sistemos

$$Aw = g \tag{16}$$

sprendinys. Kadangi žinome A, o $w(x, y)$ yra apibrėžta, tai gali būti apskaičiuoti g_{ij}.

Mažoruojanti funkcija

Pakeitus formą ir įvedus pažymėjimus, skirtuminis uždavinys paklaidai:

$$z_{ij} := u_{ij} - U_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \; j = 1, 2, \ldots, N-1.$$

$$L(z_{ij}) := -\frac{z_{i-1,j} - 2z_{ij} + z_{i+1,j}}{h^2} - \frac{z_{i,j-1} - 2z_{ij} + z_{i,j+1}}{h^2} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} z_{ij} = R_{ij}(h) \quad i, j = 1, \ldots, N-1, \quad (17)$$

$$z_{i0} = z_{iN} = z_{0j} = 0, \quad (18)$$

$$l(z_{ij}) := z_{Nj} - h\gamma \left(\frac{z_{mj} + z_{Nj}}{2} + \sum_{i=m+1}^{N-1} z_{ij} \right) = R_{Nj}, j = 1, 2, \ldots, N-1, \quad (19)$$

kur

$$|R_{ij}| \le \frac{h^2 M_4}{6}, \quad |R_{Nj}| \le \frac{h^2 M_2 \gamma}{12}. \quad (20)$$

Sudarome mažoruojančią funkciją:

$$w(x, y) = \frac{h^2 M(1+\gamma)}{6 \cdot C_0} \left(K - \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 + ax \right), \quad (21)$$

kur $C_0 > 0$, $K > 1/2$, $a > 0$ – konstantos, nepriklausančios nuo h.

Mažoruojanti funkcija

Mūsų atveju mažoruojanti funkcija konstruojama esant nelokaliosioms integralinėms sąlygoms.

Ilgai negalėjome tinkamai parinkti mažoruojančios funkcijos, kai integralinėje sąlygoje $\gamma \geq 2$.

Spręsdami uždavinį, kai integralo rėžiai yra ne *(0, 1),* bet $(\xi, 1)$, pastebėjome, kad galime sukonstruoti mažoruojančią funkciją ir atveju $\gamma > 2$, tačiau taip pat ne visoms γ reikšmėms.

Manome, kad esant integralinėms sąlygoms, mažoruojanti funkcija turėtų būti sudėtingesnė nei antrojo laipsnio daugianaris x ir y atžvilgiu (gal nebūtinai antrojo laipsnio daugianaris).

Taip pat, nelokaliose sąlygose esant integralui, mažoruojančioje funkcijoje turi būti įvestas papildomas dėmuo ax.

Mažoruojanti funkcija

Taip sukonstruota mažoruojanti funkcija w_{ij} tenkina lygčių sistemą

$$L(w_{ij}) = g_{ij} \geq \frac{h^2 M_4}{6}, \tag{22}$$

$$l(w_{ij}) = g_{Nj} \geq \frac{h^2 M_2 \gamma}{12}, \tag{23}$$

$$w_{i0} \geq 0, \quad w_{iN} \geq 0, \quad w_{0j} \geq 0. \tag{24}$$

Tada galima taikyti palyginimo teoremą.

Jei (18) sąlygos ($z_{i0} = z_{iN} = z_{0j} = 0$) būtų nenulinės, g tik padidėtų.

Mažoruojanti funkcija

Teorema.

Bet kurioms $\xi_0 \in [0, 1)$ ir $\gamma_0 \in [0, \frac{2}{1-\xi_0^2})$ reikšmėms pasirinkime $K > 1/2$, $a > 0$ and $C_0 \geq \delta > 0$, tokius, kad

- sistemos $Az=R$, užrašytos formulėmis (17)-(19), matrica A yra M-matrica
- $w(x, y)$, apibrėžta (21) formule, yra mažoruojanti funkcija, t. y.

$$|z_{ij}| \leq |w_{ij}| \leq Ch^2,$$

kur C nepriklauso nuo h.

Mažoruojanti funkcija

Apibrėžiame $\widetilde{w}$:

$$\tilde{w}(x, y) = K - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + ax$$

K ir *a* priklauso nuo ξ ir γ.

$$l(\tilde{w}_{Nj}) \geq K(1 - \gamma + \gamma\xi) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\gamma}{24} - \frac{\gamma}{3}\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2\right) - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 (1 - \gamma + \gamma\xi) + a\left(1 - \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma\xi^2}{2}\right) \quad (25)$$

(25) išraiškoje koeficientas prie *a* yra teigiamas $1 - \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma\xi^2}{2} > 0$

Kai $\gamma_0 \in [0, \frac{2}{1-\xi_0^2})$, visada galima rasti *a* > *0*, tokį, kad $l(\tilde{w_{Nj}}) \geq C_0 > 0$.

Todėl $l(\tilde{w_{Nj}}) \geq C_0 > 0 \;\rightarrow\; l\left(\tilde{w_{Nj}} \cdot \frac{1}{C_0}\right) \geq 1 \;\rightarrow\; l(w_{Nj}) \geq \frac{h^2 M_2 \gamma}{12}$

ir galima taikyti palyginimo teoremą.

Mažoruojanti funkcija

$$|z_{ij}| = \max_{x,y}\left(K - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + ax\right)\frac{h^2 M(\gamma+1)}{6}\cdot\frac{1}{C_0} \le C\cdot h^2,$$

kur C nepriklauso nuo h, bet priklauso nuo ξ, γ, K, a ir C_0. Keičiant K ir a, taip pat kinta ir C_0.

- Pavyzdžiai:
  - kai $\xi = 3/4$, tai $\gamma < \dfrac{2}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \dfrac{32}{7}$,
  - kai $\gamma = 3$ ir $a = 1$, tai $C_0 > 1/8$,
  - kai $\gamma = 4$ ir $a = 1$, tai $C_0 = 1/8$.
- Bendras dėsningumas: mažesnėms γ reikšmėms C_0 yra didesnis, taigi ir paklaida yra mažesnė.

Išvados

- Pranešime buvo tirta, su kokiomis parametrų ξ ir γ reikšmėmis skirtuminių lygčių sistemos matrica yra M-matrica
- Parodyta, kad, jei skirtuminių lygčių sistemos matrica yra M-matrica, bet kuriai parametro ξ reikšmei galima sukonstruoti mažoruojančią funkciją paklaidai

Publikacijos

- O. Štikoniene, M. Sapagovas, R. Čiupaila. On iterative methods for some elliptic equations with nonlocal conditions. Nonlin. Anal. Model. Contr., 2014, 19(3), 517-535.
- M. Sapagovas, V. Griškoniene, O. Štikonienė. Application of M-matrices theory to numerical investigation of a nonlinear elliptic equation with an integral condition. Nonlin. Anal. Model. Contr., 2017, 22(4):489-504.
- K. Jakubelienė, R. Čiupaila, M. Sapagovas. Semi-implicit difference scheme for a two-dimensional parabolic equations with an integral boundary conditions. Mathem. Mod. Anal. 2018, 22(5), 617-633.
- M. Sapagovas, O. Štikonienė, K. Jakubelienė, R. Čiupaila. Finite difference method for boundary value problem for nonlinear elliptic equation with nonlocal conditions. Bound. Val. Prob., 2019, No94.
- R. Čiupaila, M. Sapagovas, K. Pupalaigė. M-matrices and convergence of finite difference scheme for parabolic equation with an integral boundary condition. Mathem. Model. Anal., 2020, 25(2): 167-183.
- R. Čiupaila, K. Pupalaigė, M. Sapagovas. On the numerical solution for nonlinear elliptic equations with variable weight coefficients in an integral boundary conditions. Nonlin. Anal. Model. Contr., 2021, 26(4): 738-758.
- K. Pupalaigė, M. Sapagovas, R. Čiupaila. Nonlinear elliptic equation with nonlocal integra boundary condition depending on two parameters. Math. Model. Anal., 2022, 27(4):610-628.
- M. Sapagovas, J. Novistkij. On stability in the maximum norm of difference scheme for nonlinear parabolic equation with nonlocal condition. Nonlin. Anal. Model. Contr., 2023, 28(2): 365-376.
- M. Sapagovas, K. Pupalaigė, R. Čiupaila, T. Meškauskas. On the spectrum structure for one difference eigenvalue problem with nonlocal boundary conditions. Math. Model. Anal., 2023, 28(3).