Ar labai toli nuo matematinės teoremos iki Nobelio premijos?

R. Čiegis

Vilniaus Gedimino technikos universitetas
e-mail: rc@vgtu.lt

Gruodžio 6 d., 2022, Vilnius

Vėl sulaukėme advento, artėja Kalėdos. Taigi galime pasikalbėti apie matematinius stebuklus, padovanojančius fizikams Nobelio premiją.

Vėl sulaukėme advento, artėja Kalėdos. Taigi galime pasikalbėti apie matematinius stebuklus, padovanojančius fizikams Nobelio premiją.

O gal atvirkščiai, fizikai įprastiniuose, net nuobodžiuose matematikos skyriuose pamato stebuklus?

Vėl sulaukėme advento, artėja Kalėdos. Taigi galime pasikalbėti apie matematinius stebuklus, padovanojančius fizikams Nobelio premiją.

O gal atvirkščiai, fizikai įprastiniuose, net nuobodžiuose matematikos skyriuose pamato stebuklus?

Bet ką reikia dar papildomai padaryti, kad Nobelio premijų komitetas tave pastebėtų?

2022 metų fizikos Nobelio premija paskirta profesoriams Clauser, Aspect ir Zeilinger už Bell teoremos rezultatų eksperimentinį patvirtinimą.

2022 metų fizikos Nobelio premija paskirta profesoriams Clauser, Aspect ir Zeilinger už Bell teoremos rezultatų eksperimentinį patvirtinimą.

Matematinės teoremos eksperimentinį patvirtinimą?

Tikrai keistas (kalėdinis) teiginys.

Pradėkime pokalbį prisimindami vieną gražų klasikinį pavyzdį, kuriame visi paminėtieji aspektai yra puikiausiai matomi – nieko nepridėsi, nei atimsi.

Pradėkime pokalbį prisimindami vieną gražų klasikinį pavyzdį, kuriame visi paminėtieji aspektai yra puikiausiai matomi – nieko nepridėsi, nei atimsi.

Pirmiausia priminsiu keturias paprastas (nors ir keistas) aksiomas, kurios apibrėžia kvantinės mechanikos matematinį aparatą.

Pradėkime pokalbį prisimindami vieną gražų klasikinį pavyzdį, kuriame visi paminėtieji aspektai yra puikiausiai matomi – nieko nepridėsi, nei atimsi.

Pirmiausia priminsiu keturias paprastas (nors ir keistas) aksiomas, kurios apibrėžia kvantinės mechanikos matematinį aparatą.

Kiekvienas galite šią techniką naudoti kaip tinkamas. Tiesa, kažkas gal gaus Nobelio premiją, kiti nepastebės jokių įdomesnių išvadų.

Pradėkime pokalbį prisimindami vieną gražų klasikinį pavyzdį, kuriame visi paminėtieji aspektai yra puikiausiai matomi – nieko nepridėsi, nei atimsi.

Pirmiausia priminsiu keturias paprastas (nors ir keistas) aksiomas, kurios apibrėžia kvantinės mechanikos matematinį aparatą.

Kiekvienas galite šią techniką naudoti kaip tinkamas. Tiesa, kažkas gal gaus Nobelio premiją, kiti nepastebės jokių įdomesnių išvadų.

Čia kaip su dažų rinkiniu, Da Vinči gimsta retai, bet dažyti sienas galime visi.

Aksioma 1

Kiekvieną izoliuotą fizikinę sistemą susiejame su Hilberto tiesine erdve H virš kompleksinių skaičių (baigtinės ar begalinės dimensijos).

Aksioma 1

Kiekvieną izoliuotą fizikinę sistemą susiejame su Hilberto tiesine erdve H virš kompleksinių skaičių (baigtinės ar begalinės dimensijos).

Konkreti sistemos būsena yra apibrėžiama šios tiesinės erdvės vienetiniu vektoriumi

$$|\psi\rangle \in H.$$

Aksioma 1

Kiekvieną izoliuotą fizikinę sistemą susiejame su Hilberto tiesine erdve H virš kompleksinių skaičių (baigtinės ar begalinės dimensijos).

Konkreti sistemos būsena yra apibrėžiama šios tiesinės erdvės vienetiniu vektoriumi

$$|\psi\rangle \in H.$$

Pasirinkę pilną ortonormuotą bazę, bet kurį vektorių galime užrašyti kaip bazinių vektorių tiesinę kombinaciją (superpoziciją)

$$|\psi\rangle = \sum_j \alpha_j \, |\psi_j\rangle \, .$$

Aksioma 2

Uždaroje (izoliuotoje) kvantinėje sistemoje jos būsenos evoliucija yra aprašoma Šredingerio lygtimi

$$i\hbar \frac{d\,|\psi\rangle}{dt} = H\,|\psi\rangle\,,$$

čia $\hbar$ yra Planck'o konstanta, o H yra ermitinis tiesinis operatorius.

Aksioma 2

Uždaroje (izoliuotoje) kvantinėje sistemoje jos būsenos evoliucija yra aprašoma Šredingerio lygtimi

$$i\hbar \frac{d\,|\psi\rangle}{dt} = H\,|\psi\rangle\,,$$

čia $\hbar$ yra Planck'o konstanta, o H yra ermitinis tiesinis operatorius.

Ši aksioma mums buvo labai svarbi, kai nagrinėjome kvantinius algoritmus.

Aksioma 3

Kvantinėje sistemoje negalime išmatuoti būsenos vektoriaus koeficientų, tai yra sužinoti $|\psi\rangle$ skleidinio visų amplitudžių α_j reikšmes.

Aksioma 3

Kvantinėje sistemoje negalime išmatuoti būsenos vektoriaus koeficientų, tai yra sužinoti $|\psi\rangle$ skleidinio visų amplitudžių α_j reikšmes.

Leistina tik matuoti pasirinkto ermitinio operatoriaus (aparato) poveikį

$$M = \sum_m m P_m,$$

kur P_m projektuoja bet kokį vektorių į operatoriaus M tikrinį vektorių $|m\rangle$, kurio tikrinė reikšmė m.

Aksioma 3

Kvantinėje sistemoje negalime išmatuoti būsenos vektoriaus koeficientų, tai yra sužinoti $|\psi\rangle$ skleidinio visų amplitudžių α_j reikšmes.

Leistina tik matuoti pasirinkto ermitinio operatoriaus (aparato) poveikį

$$M = \sum_m m P_m,$$

kur P_m projektuoja bet kokį vektorių į operatoriaus M tikrinį vektorių $|m\rangle$, kurio tikrinė reikšmė m.

Matuojame ne skaičiaus reikšmę, bet operatoriaus poveikį.

Taigi aparatu M matuodami kvantinę būseną $|\psi\rangle$ su tikimybe

$$p(m) = \langle\psi| P_m |\psi\rangle = |\alpha_m|^2$$

gauname rezultatą m.

Po matavimo kvantinės sistemos būsena iš karto pasikeičia ir sutampa su tikriniu vektorium $|m\rangle$

$$\psi = \frac{P_m |\psi\rangle}{\sqrt{p(m)}}.$$

Iki šiol nežinome tokio kolapso teorinio paaiškinimo, jį tiesiog postuluojame.

Heisenbergo neapibrėžtumo principas

Vienas pagrindinių kvantinės mechanikos kūrėjų Werner Heisenberg suformulavo dar keistesnę matavimo operacijos savybę, kad daugeliu atveju negalime kartu tiksliai žinoti dviejų operatorių poveikių.

Heisenbergo neapibrėžtumo principas

Vienas pagrindinių kvantinės mechanikos kūrėjų Werner Heisenberg suformulavo dar keistesnę matavimo operacijos savybę, kad daugeliu atveju negalime kartu tiksliai žinoti dviejų operatorių poveikių.

Ir šis grandiozinės svarbos fundamentalus rezultatas yra gaunamas kaip kuklios, puikiai žinomos matematinės teoremos išvada.

Garsioji Pierre-Simon Laplace frazė, ištarta 1814 metais:

If someone (the demon) knows the precise location and momentum of every atom in the universe, their past and future values for any given time are entailed; they can be calculated from the laws of classical mechanics.

Garsioji Pierre-Simon Laplace frazė, ištarta 1814 metais:

If someone (the demon) knows the precise location and momentum of every atom in the universe, their past and future values for any given time are entailed; they can be calculated from the laws of classical mechanics.

1927 metais Heisenbergas suformulavo fundamentalią nelygybę, kad dalelės vieta ir impulsas negali būti išmatuoti tiksliau, nei

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2},$$

čia σ_x ir σ_p yra taško pozicijos (vietos) ir impulso matavimų standartiniai nuokrypiai. Šią sąvoką apibrėžiame matematinės statistikos vadovėliuose ir aiškiname (kartais nelabai sėkmingai) studentams.

Imkime du stebimus (observable) operatorius A, B ir kvantinės sistemos būseną $|\psi\rangle$.
Operatoriaus A vidurkis ir standartinis nuokrypis skaičiuojami taip:

$$\langle A \rangle = \langle\psi|\, A \,|\psi\rangle\,, \quad \Delta(A) = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}.$$

Imkime du stebimus (observable) operatorius A, B ir kvantinės sistemos būseną $|\psi\rangle$.
Operatoriaus A vidurkis ir standartinis nuokrypis skaičiuojami taip:

$$\langle A \rangle = \langle\psi| A |\psi\rangle , \quad \Delta(A) = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}.$$

Prisiminkime Cauchy-Schwarz nelygybę

$$|\langle\psi| AB |\psi\rangle|^2 \leq \langle\psi| A^2 |\psi\rangle \ \langle\psi| B^2 |\psi\rangle .$$

Imkime du stebimus (observable) operatorius A, B ir kvantinės sistemos būseną $|\psi\rangle$.
Operatoriaus A vidurkis ir standartinis nuokrypis skaičiuojami taip:

$$\langle A \rangle = \langle\psi| A |\psi\rangle\,, \quad \Delta(A) = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}.$$

Prisiminkime Cauchy-Schwarz nelygybę

$$|\langle\psi| AB |\psi\rangle|^2 \leq \langle\psi| A^2 |\psi\rangle \; \langle\psi| B^2 |\psi\rangle\,.$$

Ji ir bus svarbiausia išvedant Heisenbergo neapibrėžtumo principo įverčius.

Tegul A ir B yra ermitiniai operatoriai.

Pažymėkime $\langle\psi| AB |\psi\rangle = x + iy$, bei jų komutatoriaus ir antikomutatoriaus operatorius

$$[A, B] = AB - BA, \quad \{A, B\} = AB + BA.$$

Tegul A ir B yra ermitiniai operatoriai.

Pažymėkime $\langle\psi| AB |\psi\rangle = x + iy$, bei jų komutatoriaus ir antikomutatoriaus operatorius

$$[A, B] = AB - BA, \quad \{A, B\} = AB + BA.$$

Tada

$$\langle\psi| [A, B] |\psi\rangle = 2iy, \quad \langle\psi| \{A, B\} |\psi\rangle = 2x.$$

Tegul A ir B yra ermitiniai operatoriai.

Pažymėkime $\langle\psi| AB |\psi\rangle = x + iy$, bei jų komutatoriaus ir antikomutatoriaus operatorius

$$[A, B] = AB - BA, \quad \{A, B\} = AB + BA.$$

Tada

$$\langle\psi| [A, B] |\psi\rangle = 2iy, \quad \langle\psi| \{A, B\} |\psi\rangle = 2x.$$

Gauname lygybę

$$|\langle\psi| [A, B] |\psi\rangle|^2 + |\langle\psi| \{A, B\} |\psi\rangle|^2 = 4 |\langle\psi| AB |\psi\rangle|^2 .$$

$$|\langle\psi|\,[A,B]\,|\psi\rangle|^2 + |\langle\psi|\,\{A,B\}\,|\psi\rangle|^2 = 4\,|\langle\psi|\,AB\,|\psi\rangle|^2\,.$$

$$|\langle\psi|\,[A,B]\,|\psi\rangle|^2 + |\langle\psi|\,\{A,B\}\,|\psi\rangle|^2 = 4\,|\langle\psi|\,AB\,|\psi\rangle|^2\,.$$

Pasinaudoję Cauchy-Schwarz nelygybe, įrodome įvertį

$$|\langle\psi|\,[A,B]\,|\psi\rangle|^2 \le 4\,\langle\psi|\,A^2\,|\psi\rangle\ \langle\psi|\,B^2\,|\psi\rangle\,.$$

$$\left|\langle\psi|\,[A,B]\,|\psi\rangle\right|^2 + \left|\langle\psi|\,\{A,B\}\,|\psi\rangle\right|^2 = 4\left|\langle\psi|\,AB\,|\psi\rangle\right|^2 .$$

Pasinaudoję Cauchy-Schwarz nelygybe, įrodome įvertį

$$\left|\langle\psi|\,[A,B]\,|\psi\rangle\right|^2 \le 4\,\langle\psi|\,A^2\,|\psi\rangle\;\langle\psi|\,B^2\,|\psi\rangle .$$

Imkime $A = C - \langle\, C\,\rangle$, $B = D - \langle\, D\,\rangle$, tada gauname Heisenbergo principo nelygybę:

$$\Delta(C)\,\Delta(D) \ge \frac{\left|\langle\psi|\,[C,D]\,|\psi\rangle\right|}{2}.$$

$$|\langle\psi|\,[A,B]\,|\psi\rangle|^2 + |\langle\psi|\,\{A,B\}\,|\psi\rangle|^2 = 4\,|\langle\psi|\,AB\,|\psi\rangle|^2\,.$$

Pasinaudoję Cauchy-Schwarz nelygybe, ¿rodome ¿vert¿

$$|\langle\psi|\,[A,B]\,|\psi\rangle|^2 \le 4\,\langle\psi|\,A^2\,|\psi\rangle\;\langle\psi|\,B^2\,|\psi\rangle\,.$$

Imkime $A = C - \langle\, C\,\rangle$, $B = D - \langle\, D\,\rangle$, tada gauname Heisenbergo principo nelygybę:

$$\Delta(C)\,\Delta(D) \ge \frac{|\langle\psi|\,[C,D]\,|\psi\rangle|}{2}.$$

Heisenbergo klasikinėje nelygybėje imsime impulso P ir vietos (pozicijos) X operatorius (jie veikia Hilberto erdvėje, kurios elementai yra funkcijos).

$$[X,P] = i\hbar\, I \;\;\rightarrow\;\; \Delta(X)\,\Delta(P) \ge \frac{\hbar}{2}.$$

Galime klausti, kodėl tik Heisenberg gavo Nobelio premiją, jei matematinis rezultatas (Cauchy-Schwarz nelygybė) jau senokai buvo žinomas?

Galime klausti, kodėl tik Heisenberg gavo Nobelio premiją, jei matematinis rezultatas (Cauchy-Schwarz nelygybė) jau senokai buvo žinomas?

Matavimai yra atliekami ne matematinėje Hilberto erdvėje, o laboratorijoje, vykdant tikslingus eksperimentus.

Galime klausti, kodėl tik Heisenberg gavo Nobelio premiją, jei matematinis rezultatas (Cauchy-Schwarz nelygybė) jau senokai buvo žinomas?

Matavimai yra atliekami ne matematinėje Hilberto erdvėje, o laboratorijoje, vykdant tikslingus eksperimentus.

Matematiniai įverčiai padėjo teorinėje fizikoje suformuluoti labai netikėtą hipotezę, bet dar nieko neįrodė.

Paskutinis kvantinės mechanikos postulatas tvirtina, kad dviejų kvantinių sistemų būseną aprašo vektorius, lygus šių kvantinių būsenų tenzorinei sandaugai.

Paskutinis kvantinės mechanikos postulatas tvirtina, kad dviejų kvantinių sistemų būseną aprašo vektorius, lygus šių kvantinių būsenų tenzorinei sandaugai.

Tarkime, kad turime du kubitus (paprasčiausias daleles), pvz. fotono sukinius (spin). Juos užrašome standartine forma (kiekvienas vektorius yra dvimatis):

$$|\psi_1\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |\psi_2\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Paskutinis kvantinės mechanikos postulatas tvirtina, kad dviejų kvantinių sistemų būseną aprašo vektorius, lygus šių kvantinių būsenų tenzorinei sandaugai.

Tarkime, kad turime du kubitus (paprasčiausias daleles), pvz. fotono sukinius (spin). Juos užrašome standartine forma (kiekvienas vektorius yra dvimatis):

$$|\psi_1\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |\psi_2\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Tada dviejų dalelių sistemą aprašo būsenos vektorius (tai jau keturmatis vektorius):

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(|00\rangle + |10\rangle - |01\rangle - |11\rangle\right). \end{aligned}$$

Šios dalelės elgiasi visai taip, kaip mes ir esame įpratę.

Šios dalelės elgiasi visai taip, kaip mes ir esame įpratę.

Tegul pirmąją dalelę pasiima Teresė, o antrąją Jevgenijus. Tai katedros kalėdinė dovana už puikų seminarą.

Šios dalelės elgiasi visai taip, kaip mes ir esame įpratę.

Tegul pirmąją dalelę pasiima Teresė, o antrąją Jevgenijus. Tai katedros kalėdinė dovana už puikų seminarą.

Jie abu žino, jog gaus dovanų arba (+1), arba (-1) (tokios yra matavimo aparato tikrinės reikšmės, o būsenų skleidinius užrašeme imdami tikrinių vektorių bazę), bet nei vienas nežino, kokia yra šių atvejų tikimybė kiekvienam iš jų. Taigi tikrai smalsu?

Šios dalelės elgiasi visai taip, kaip mes ir esame įpratę.

Tegul pirmąją dalelę pasiima Teresė, o antrąją Jevgenijus. Tai katedros kalėdinė dovana už puikų seminarą.

Jie abu žino, jog gaus dovanų arba (+1), arba (-1) (tokios yra matavimo aparato tikrinės reikšmės, o būsenų skleidinius užrašeme imdami tikrinių vektorių bazę), bet nei vienas nežino, kokia yra šių atvejų tikimybė kiekvienam iš jų. Taigi tikrai smalsu?

Teresė smalsesnė, ji nusprendžia savo dalelę išmatuoti pirmoji (Jevgenijus apie tai net nežino).

Mes aptarėme, kad vienodai tikėtina, jog tokio matavimo rezultatas bus arba (+1), arba (-1). Tarkime, kad Teresės dovanėlės reikšmė yra (+1).

Mes aptarėme, kad vienodai tikėtina, jog tokio matavimo rezultatas bus arba (+1), arba (-1). Tarkime, kad Teresės dovanėlės reikšmė yra (+1).

Tada turime naują dviejų dalelių sistemos būseną, bet Jevgenijaus dalelė liko nepakitusi (o kodėl ji turėtų pasikeisti, kai matavimą atliko tik smalsioji Teresė?)

$$|\psi\rangle = |0\rangle \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right).$$

Mes aptarėme, kad vienodai tikėtina, jog tokio matavimo rezultatas bus arba (+1), arba (-1). Tarkime, kad Teresės dovanėlės reikšmė yra (+1).

Tada turime naują dviejų dalelių sistemos būseną, bet Jevgenijaus dalelė liko nepakitusi (o kodėl ji turėtų pasikeisti, kai matavimą atliko tik smalsioji Teresė?)

$$|\psi\rangle = |0\rangle \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right).$$

Nei Teresė, nei Jevgenijus ir dabar nežino, kokia yra Jevgenijaus dovanėlės būsena.

Kalėdiniai stebuklai tęsiasi. Į svečius pas mus užsuka Albertas su dviem draugais. Apie šią trijulę, kurią dažniausiai vadiname trumpai EPR, visi esame girdėję nuotaikingų pasakojimų. Vaikinai niekada nesutinka su daugumos pripažintomis tiesomis, na o Albertas yra šios grupelės neabejotinas lyderis.

Kalėdiniai stebuklai tęsiasi. Į svečius pas mus užsuka Albertas su dviem draugais. Apie šią trijulę, kurią dažniausiai vadiname trumpai EPR, visi esame girdėję nuotaikingų pasakojimų. Vaikinai niekada nesutinka su daugumos pripažintomis tiesomis, na o Albertas yra šios grupelės neabejotinas lyderis.

Ir šį kartą Albertas pareiškia nei daug, nei mažai – kad kažkas yra labai neteisinga mūsų ką tik panaudotoje teorijoje.

Kalėdiniai stebuklai tęsiasi. Į svečius pas mus užsuka Albertas su dviem draugais. Apie šią trijulę, kurią dažniausiai vadiname trumpai EPR, visi esame girdėję nuotaikingų pasakojimų. Vaikinai niekada nesutinka su daugumos pripažintomis tiesomis, na o Albertas yra šios grupelės neabejotinas lyderis.

Ir šį kartą Albertas pareiškia nei daug, nei mažai – kad kažkas yra labai neteisinga mūsų ką tik panaudotoje teorijoje.

Kaip visada demonstruojant fokusus, stebukladarys atlieka keletą paslaptingų veiksmų (galiu pasigirti, kad aš irgi moku šį fokusą atlikti ne blogiau už Albertą) ir gauna kitokią kalėdinių dovanėlių Teresei ir Jevgenijui būseną

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right).$$

Teresė su Jevgenijum pasiima savo dovanėles (daleles) ir išvažiuoja į skirtingas tolimas, tolimas šalis švęsti gražias žiemos šventes.

Teresė su Jevgenijum pasiima savo dovanėles (daleles) ir išvažiuoja į skirtingas tolimas, tolimas šalis švęsti gražias žiemos šventes.

Ir vėl kiekvienas iš jų gaus dovanų arba (+1) arba (-1), mes papildomai žinome, kad abiejų variantų tikimybės vienodos.

Teresė su Jevgenijum pasiima savo dovanėles (daleles) ir išvažiuoja į skirtingas tolimas, tolimas šalis švęsti gražias žiemos šventes.

Ir vėl kiekvienas iš jų gaus dovanų arba (+1) arba (-1), mes papildomai žinome, kad abiejų variantų tikimybės vienodos.

Teresė nelaukia Kūčių vakaro ir pažiūri, kokią dovanėlę gavo iš katedros kolegų. Tarkime, kad jos matavimų rezultatas vėl yra 1.

Teresė su Jevgenijum pasiima savo dovanėles (daleles) ir išvažiuoja į skirtingas tolimas, tolimas šalis švęsti gražias žiemos šventes.

Ir vėl kiekvienas iš jų gaus dovanų arba (+1) arba (-1), mes papildomai žinome, kad abiejų variantų tikimybės vienodos.

Teresė nelaukia Kūčių vakaro ir pažiūri, kokią dovanėlę gavo iš katedros kolegų. Tarkime, kad jos matavimų rezultatas vėl yra 1.

Patikrinkime, kaip gyvena Jevgenijaus dovanėlė, va čia mūsų laukia didelis netikėtumas

$$|\psi\rangle = |00\rangle \, .$$

Jegenijaus dalelės būsena taip pat pasikeitė ir jos reikšmė yra tokia pati kaip ir Teresės.

Jegenijaus dalelės būsena taip pat pasikeitė ir jos reikšmė yra tokia pati kaip ir Teresės.

Bet jie gi taip toli vienas nuo kito (nelokali sąveika?), o informacija apie Teresės atliktą matavimą atrodo buvo perduota netgi greičiau už šviesos greitį vakuume!

Šį virtualų eksperimentą savo 1935 metų straipsnyje pasiūlė Albert Einstein, Boris Podolsky ir Nathan Rosen. Tokios būsenos vadinamos susietomis (entangled).

Autorių argumentai buvo tokie: dalelė gali paveikti tik artimiausius (lokalius) kaimynus, o jeigu poveikis perduodamas per fizikinį lauką, tai šio poveikio greitis negali būti didesnis už šviesos greitį.

Šį virtualų eksperimentą savo 1935 metų straipsnyje pasiūlė Albert Einstein, Boris Podolsky ir Nathan Rosen. Tokios būsenos vadinamos susietomis (entangled).

Autorių argumentai buvo tokie: dalelė gali paveikti tik artimiausius (lokalius) kaimynus, o jeigu poveikis perduodamas per fizikinį lauką, tai šio poveikio greitis negali būti didesnis už šviesos greitį.

Todėl egzistuojanti kvantinės mechanikos teorija yra nepilna, ji neaprašo stebimo antros dalelės būsenos kolapso, kuris įvyksta momentaliai po pirmosios dalelės matavimo.

Galimi tik du paaiškinimai:

Galimi tik du paaiškinimai:

arba pirmosios dalelės matavimas paveikia antrąją dalelę didesniu nei šviesos greičiu (bet tai draudžia specialioji reliatyvumo teorija),

Galimi tik du paaiškinimai:

arba pirmosios dalelės matavimas paveikia antrąją dalelę didesniu nei šviesos greičiu (bet tai draudžia specialioji reliatyvumo teorija),

arba susietos dalelės turi kakžkokį neišmatuojamą (neįtrauktą į teoriją) požymį, kuris atsiranda dar dalelių sukūrimo metu.
Tada matavimo rezultatai visada yra deterministiniai, o stebimi neapibrėžtumai atsiranda tik todėl, kad teorijoje nežinome ar ignoruojame šiuos požymius.

Straipsnis nebuvo sutiktas entuziastingai, greičiau jis buvo ignoruojamas. Vienas iš paaiškinimų sietinas su faktu, kad EPR nepateikė jokių iš šios teorijos sekančių išvadų, kurios galėtų būti eksperimentiškai patikrintos.

Straipsnis nebuvo sutiktas entuziastingai, greičiau jis buvo ignoruojamas. Vienas iš paaiškinimų sietinas su faktu, kad EPR nepateikė jokių iš šios teorijos sekančių išvadų, kurios galėtų būti eksperimentiškai patikrintos.

Prisiminkite Einšteino sukurtas specialiąją ir bendrąją reliatyvumo teorijas.

Visgi vienas fizikas-matematikas šiuo klausimu domėjosi rimtai.

Visgi vienas fizikas-matematikas šiuo klausimu domėjosi rimtai.

1964 John Bell paskelbė puikų rezultatą (teoremą), šį rezultatą dabar vadiname Bell nelygybe.

Visgi vienas fizikas-matematikas šiuo klausimu domėjosi rimtai.

1964 John Bell paskelbė puikų rezultatą (teoremą), šį rezultatą dabar vadiname Bell nelygybe.

Jis nagrinėjo tokį virtualų eksperimentą:

Visgi vienas fizikas-matematikas šiuo klausimu domėjosi rimtai.

1964 John Bell paskelbė puikų rezultatą (teoremą), šį rezultatą dabar vadiname Bell nelygybe.

Jis nagrinėjo tokį virtualų eksperimentą:

Alice ir Bob randasi toli vienas nuo kito.

Visgi vienas fizikas-matematikas šiuo klausimu domėjosi rimtai.

1964 John Bell paskelbė puikų rezultatą (teoremą), šį rezultatą dabar vadiname Bell nelygybe.

Jis nagrinėjo tokį virtualų eksperimentą:

Alice ir Bob randasi toli vienas nuo kito.

Jų kolega Victor paruošia jiems naują porą dalelių, vieną dalelę jis nusiunčia Alice, o kitą – Bob.

Visgi vienas fizikas-matematikas šiuo klausimu domėjosi rimtai.

1964 John Bell paskelbė puikų rezultatą (teoremą), šį rezultatą dabar vadiname Bell nelygybe.

Jis nagrinėjo tokį virtualų eksperimentą:

Alice ir Bob randasi toli vienas nuo kito.

Jų kolega Victor paruošia jiems naują porą dalelių, vieną dalelę jis nusiunčia Alice, o kitą – Bob.

Alice, gavusi savo dalelę, atsitiktinai pasirenka kurį iš dviejų matavimų A_0 ar A_1 ji atliks.

Abu matavimai yra binarieji: jų galimi rezultatai yra $(+1)$ arba (-1).

Visgi vienas fizikas-matematikas šiuo klausimu domėjosi rimtai.

1964 John Bell paskelbė puikų rezultatą (teoremą), šį rezultatą dabar vadiname Bell nelygybe.

Jis nagrinėjo tokį virtualų eksperimentą:

Alice ir Bob randasi toli vienas nuo kito.

Jų kolega Victor paruošia jiems naują porą dalelių, vieną dalelę jis nusiunčia Alice, o kitą – Bob.

Alice, gavusi savo dalelę, atsitiktinai pasirenka kurį iš dviejų matavimų A_0 ar A_1 ji atliks.

Abu matavimai yra binarieji: jų galimi rezultatai yra (+1) arba (-1).

Panašiai ir Bob pasirenka, kurį iš dviejų matavimų B_0 ar B_1 jis atliks.

Tarsime, kad kiekvienas matavimas parodo dalelės kažkurią paslėptąją savybę. Pvz. Alice atlieka matavimą A_0 ir gauna reikšmę $+1$, taigi jos dalelė turi paslėptą savybę a_0, kurios vertė šį kartą buvo $+1$.

Tarsime, kad kiekvienas matavimas parodo dalelės kažkurią paslėptąją savybę. Pvz. Alice atlieka matavimą A_0 ir gauna reikšmę $+1$, taigi jos dalelė turi paslėptą savybę a_0, kurios vertė šį kartą buvo $+1$.

Bell teoremoje padarytos tik labai bendros prielaidos.

1. Egzistuoja nepriklausomos dalelių savybės a_0, a_1, b_0 ir b_1, jos nepriklauso nuo to, ar buvo atlikti kokie nors matavimai (paslėptieji kintamieji, realizmas).

2. Alice pasirinkimas atlikti konkretų matavimą niekaip nepaveikia Bob gautų rezultatų (lokalumo prielaida).

Nagrinėkime tokią matavimo reikšmių kombinaciją

$$a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0 - a_1 b_1 = (a_0 + a_1) b_0 + (a_0 - a_1) b_1 .$$

Kadangi a_0 ir a_1 reikšmės yra ± 1, tai šios kombinacijos reikšmė gali būti tik ± 2.

Nagrinėkime tokią matavimo reikšmių kombinaciją

$$a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0 - a_1 b_1 = (a_0 + a_1) b_0 + (a_0 - a_1) b_1 .$$

Kadangi a_0 ir a_1 reikšmės yra ± 1, tai šios kombinacijos reikšmė gali būti tik ± 2.

Aišku, kad vieno dalelių rinkinio atveju, mes negalime suskaičiuoti šios formulės reikšmės.

Bet Victor paruošia daug porų, tada galime suskaičiuoti išraiškos reikšmės vidurkį, išreikšdami jį per atskirų sumos dėmenų vidurkius.

Nagrinėkime tokią matavimo reikšmių kombinaciją

$$a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0 - a_1 b_1 = (a_0 + a_1) b_0 + (a_0 - a_1) b_1 .$$

Kadangi a_0 ir a_1 reikšmės yra ± 1, tai šios kombinacijos reikšmė gali būti tik ± 2.

Aišku, kad vieno dalelių rinkinio atveju, mes negalime suskaičiuoti šios formulės reikšmės.

Bet Victor paruošia daug porų, tada galime suskaičiuoti išraiškos reikšmės vidurkį, išreikšdami jį per atskirų sumos dėmenų vidurkius.

Gauname Bell nelygybę:

$$< a_0 b_0 > + < a_0 b_1 > + < a_1 b_0 > - < a_1 b_1 > \ \leq \ 2$$

Nagrinėkime tokią matavimo reikšmių kombinaciją

$$a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0 - a_1 b_1 = (a_0 + a_1) b_0 + (a_0 - a_1) b_1 .$$

Kadangi a_0 ir a_1 reikšmės yra ± 1, tai šios kombinacijos reikšmė gali būti tik ± 2.

Aišku, kad vieno dalelių rinkinio atveju, mes negalime suskaičiuoti šios formulės reikšmės.

Bet Victor paruošia daug porų, tada galime suskaičiuoti išraiškos reikšmės vidurkį, išreikšdami jį per atskirų sumos dėmenų vidurkius.

Gauname Bell nelygybę:

$$< a_0 b_0 > + < a_0 b_1 > + < a_1 b_0 > - < a_1 b_1 > \ \leq 2$$

Jeigu Einšteinas teisus, jog kvantinės mechanikos teorija yra nepilna, tai ši nelygybė turi galioti ir visuose kvantinių sistemų eksperimentuose.

O dabar panagrinėkime paprastą virtualų eksperimentą, kai matuojame kvantines daleles ir įsitikinsime, kad tada Bell nelygybė jau negalioja.

Imkime dvi susietas daleles, kurių būsena yra

$$|\psi\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}},$$

čia $|0\rangle$ ir $|1\rangle$ yra Pauli matricos

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

tikriniai vektoriai, jų tikrinės reikšmės ± 1.

Alice gali atlikti tokius matavimus

$$A_0 = \sigma_z, \quad A_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Bob pasirenka vieną iš matavimų

$$B_0 = -\frac{\sigma_x + \sigma_z}{\sqrt{2}}, \quad B_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{\sqrt{2}}.$$

Alice gali atlikti tokius matavimus

$$A_0 = \sigma_z, \quad A_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Bob pasirenka vieną iš matavimų

$$B_0 = -\frac{\sigma_x + \sigma_z}{\sqrt{2}}, \quad B_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{\sqrt{2}}.$$

Naudodami kvantinės mechanikos matematinį aparatą nesunkiai suskaičiuojame vidurkius (tikėtinus kvantinių matavimų rezultatus)

$$\langle\, A_0 \otimes B_0 \,\rangle, \ldots$$

Kadangi seminaro dalyviai yra profesionalūs matematikai, tai bet kurį iš Jūsų dabar pakviesiu prie lentos atlikti šiuos skaičiavimus.

Kadangi seminaro dalyviai yra profesionalūs matematikai, tai bet kurį iš Jūsų dabar pakviesiu prie lentos atlikti šiuos skaičiavimus.

Gerai, šiandien vyksta kalėdinis seminaras, todėl skaičiavimus atliksiu aš pats.

Kadangi seminaro dalyviai yra profesionalūs matematikai, tai bet kurį iš Jūsų dabar pakviesiu prie lentos atlikti šiuos skaičiavimus.

Gerai, šiandien vyksta kalėdinis seminaras, todėl skaičiavimus atliksiu aš pats.
Iš matematinės statistikos paskaitų žinome, kad

$$\langle A_0 \otimes B_0 \rangle = \langle\psi| A_0 \otimes B_0 |\psi\rangle \, .$$

Tada galime pasirinkti įvairius kelius, kaip skaičiuoti šias tenzorines išraiškas, aš tai padarysiu ne greičiausiu, bet paprasčiausiu būdu – atliksime klasikinius vektorinius skaičiavimus.

$$|\psi\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix},$$

$$A_0 \otimes B_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\1 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1 & -1\\0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Tada skaičiuojame matricos ir vektoriaus sandaugą, bei gautųjų dviejų vektorių skaliarinę sandaugą

$$
\begin{aligned}
< A_0 \otimes B_0 > &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad < A_0 \otimes B_1 > = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\
< A_1 \otimes B_0 > &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad < A_1 \otimes B_0 > = -\frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

Tada skaičiuojame matricos ir vektoriaus sandaugą, bei gautųjų dviejų vektorių skaliarinę sandaugą

$$< A_0 \otimes B_0 >= \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad < A_0 \otimes B_1 >= \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$< A_1 \otimes B_0 >= \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad < A_1 \otimes B_0 >= -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vadinasi Bell išraiška yra lygi

$$< A_0 \otimes B_0 > + < A_0 \otimes B_1 > + < A_1 \otimes B_0 > - < A_1 \otimes B_0 >= 2\sqrt{2}.$$

Tada skaičiuojame matricos ir vektoriaus sandaugą, bei gautųjų dviejų vektorių skaliarinę sandaugą

$$< A_0 \otimes B_0 >= \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad < A_0 \otimes B_1 >= \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$< A_1 \otimes B_0 >= \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad < A_1 \otimes B_0 >= -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vadinasi Bell išraiška yra lygi

$$< A_0 \otimes B_0 > + < A_0 \otimes B_1 > + < A_1 \otimes B_0 > - < A_1 \otimes B_0 >= 2\sqrt{2}.$$

Taigi, suradome teorinį kontrapavyzdį, kai Einšteinas yra neteisus.

Toliau jau buvo atliekami eksperimentai laboratorijose, o ne Hilberto erdvėse ir buvo gauti Nobelio premija fizikoje įvertinti rezultatai.