Lauko teorijos matematiniai modeliai – Maksvelo lygčių sistema ir jos analizė

R. Čiegis

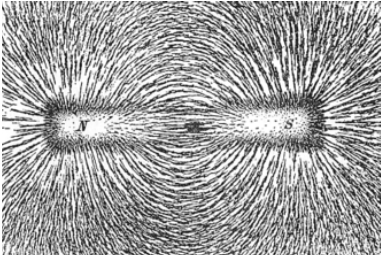
Vilniaus Gedimino technikos universitetas
e-mail: rc@vgtu.lt

Spalio 4 d., 2022, Vilnius

Seminare susipažinsime, kaip sudaroma Maksvelo lygčių sistema, modeliuojanti elektromagnetinius laukus.

Seminare susipažinsime, kaip sudaroma Maksvelo lygčių sistema, modeliuojanti elektromagnetinius laukus.

Šiuos laukus galima "matyti". Kaip pavyzdį pateikiame geležies drožlių (dipolių) pasiskirstymą magnetiniame lauke.



Mus domins tokie klausimai:

Mus domins tokie klausimai:

Kaip sudaromi matematiniai modeliai, remiantis fundamentaliais tvermės dėsniais (integralinės lygtys)?

Mus domins tokie klausimai:

Kaip sudaromi matematiniai modeliai, remiantis fundamentaliais tvermės dėsniais (integralinės lygtys)?

Kaip sudaromi ekvivalentūs matematiniai modeliai, kurie yra aprašomi diferencialinių lygčių dalinėmis išvestinėmis sistema?

Mus domins tokie klausimai:

Kaip sudaromi matematiniai modeliai, remiantis fundamentaliais tvermės dėsniais (integralinės lygtys)?

Kaip sudaromi ekvivalentūs matematiniai modeliai, kurie yra aprašomi diferencialinių lygčių dalinėmis išvestinėmis sistema?

Kokį variantą pasirinkti? Aišku, kad tai lemia konkretūs tyrėjo tikslai.

Šio seminaro eiga yra paprasta, prisiminsime mokyklinius metus, fizikos pamokas.

Šio seminaro eiga yra paprasta, prisiminsime mokyklinius metus, fizikos pamokas.

Ten gautos žinios ir yra tas bagažas, kuris padės sudaryti matematinį modelį.

Šio seminaro eiga yra paprasta, prisiminsime mokyklinius metus, fizikos pamokas.

Ten gautos žinios ir yra tas bagažas, kuris padės sudaryti matematinį modelį.

Beje, ir Maksvelas ėjo būtent šiuo keliu.

Faradėjaus elektromagnetizmo dėsnis

Sakykime, kad trimatėje srityje Ω turime glodžią dvimatę orientuotą daugdarą (manifold) A, šio paviršiaus kontūrą žymėsime ∂A.

Faradėjaus elektromagnetizmo dėsnis

Sakykime, kad trimatėje srityje Ω turime glodžią dvimatę orientuotą daugdarą (manifold) A, šio paviršiaus kontūrą žymėsime ∂A.

Kaip visada laikysime, kad paviršiaus A normalusis laukas n apsprendžia ir kontūro ∂A apėjimo kryptį (tangentinį lauką τ).

Elektromagnetinė indukcija – fizikinis reiškinys, kai elektros srovė ima tekėti laidininku, esančiu kintančiame magnetiniame lauke.

Elektromagnetinė indukcija – fizikinis reiškinys, kai elektros srovė ima tekėti laidininku, esančiu kintančiame magnetiniame lauke.

Kitos rūšies energija (magnetinė) aktyvuoja elektros srovę.

Elektromagnetinė indukcija – fizikinis reiškinys, kai elektros srovė ima tekėti laidininku, esančiu kintančiame magnetiniame lauke.

Kitos rūšies energija (magnetinė) aktyvuoja elektros srovę.

Elektrinio lauko E integralas paviršiaus A kontūru ∂A (dar vadinamas lauko cirkuliacija) yra lygus magnetinės indukcijos B pokyčiui per paviršių A.

$$\partial_t \int_A \mathrm{B} \cdot da + \int_{\partial A} \mathrm{E} \cdot dl = 0.$$

$$\partial_t \int_A \mathrm{B} \cdot da + \int_{\partial A} \mathrm{E} \cdot dl = 0.$$

Čia naudojame žymėjimus

$$\mathrm{u} \cdot da = \mathrm{u} \cdot \mathrm{n}\, da, \quad \mathrm{u} \cdot dl = \mathrm{u} \cdot \tau\, dl,$$

$\mathrm{n} : A \to \mathbb{R}^3$ yra normalusis vektorinis laukas,
$\tau : \partial A \to \mathbb{R}^3$ yra tangentinis vektorinis laukas.

$$\partial_t \int_A \mathrm{B} \cdot da + \int_{\partial A} \mathrm{E} \cdot dl = 0.$$

Pavyzdys. Nagrinėkime paviršių (kvadratą)

$$A = (0,1) \times (0,1) \times \{0\}$$

ir jo kontūrą

$$\begin{aligned} \partial A = & (0,1) \times \{0\} \times \{0\} \ \cup \{1\} \times (0,1) \times \{0\} \\ & \cup (0,1) \times \{1\} \times \{0\} \ \cup \{0\} \times (0,1) \times \{0\}. \end{aligned}$$

Tarkime, kad paviršius yra orientuotas tokia normalės kryptimi

$$\mathrm{n}(\mathrm{x}) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{x} \in A.$$

$$0 = \int_0^1 \int_0^1 \partial_t \mathsf{B}(x_1, x_2, 0, t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dx_1\, dx_2$$

$$+ \int_0^1 \mathsf{E}(x_1, 0, 0, t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dx_1 + \int_0^1 \mathsf{E}(1, x_2, 0, t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dx_2$$

$$+ \int_1^0 \mathsf{E}(x_1, 1, 0, t) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dx_1 + \int_1^0 \mathsf{E}(0, x_2, 0, t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} dx_2.$$

Imdami Faradėjaus dėsnį sudarėme integralinę lygtį (tvermės dėsnį)

$$\partial_t \int_A \mathrm{B} \cdot da + \int_{\partial A} \mathrm{E} \cdot dl = 0.$$

Panaudodami Stokso formulę

$$\int_A (\nabla \times \mathrm{u}) \cdot \mathrm{n}\, da = \int_{\partial A} \mathrm{u} \cdot \tau\, dl,$$

gauname tris diferencialines lygtis dalinėmis išvestinėmis

$$\partial_t \mathrm{B} + \nabla \times \mathrm{E} = 0.$$

Sudarėme tris lygtis, o nežinomųjų yra šeši:

Sudarėme tris lygtis, o nežinomųjų yra šeši:

$$
\begin{aligned}
\partial_t B_1 + \partial_{x_2} E_3 - \partial_{x_3} E_2 &= 0, \\
\partial_t B_2 + \partial_{x_3} E_1 - \partial_{x_1} E_3 &= 0, \\
\partial_t B_3 + \partial_{x_1} E_2 - \partial_{x_2} E_1 &= 0.
\end{aligned}
$$

Sudarėme tris lygtis, o nežinomųjų yra šeši:

$$
\begin{aligned}
\partial_t B_1 + \partial_{x_2} E_3 - \partial_{x_3} E_2 &= 0, \\
\partial_t B_2 + \partial_{x_3} E_1 - \partial_{x_1} E_3 &= 0, \\
\partial_t B_3 + \partial_{x_1} E_2 - \partial_{x_2} E_1 &= 0.
\end{aligned}
$$

Taigi reikia papildomai sudaryti dar bent tris lygtis.

Ampero dėsnis su Maksvelo pataisa

Amperas eksperimentiškai atrado dėsnį (1823 m.), kuris susieja magnetinio lauko integralą paviršiaus A uždaru kontūru ir elektros srovės, tekančios šiuo paviršiumi, integralą.

Ampero dėsnis su Maksvelo pataisa

Amperas eksperimentiškai atrado dėsnį (1823 m.), kuris susieja magnetinio lauko integralą paviršiaus A uždaru kontūru ir elektros srovės, tekančios šiuo paviršiumi, integralą.

1865 metais Maksvelas ne tik išvedė šį dėsnį iš hidrodinamikos lygčių, bet ir modifikavo dėsnį kintančių laike srovių atvejui. Jis įvedė papildomą elektrinės indukcijos (elektrinio poslinkio) narį, šį lauką žymėsime D. Gautosios lygties struktūra tapo panaši į magnetinės indukcijos lygties struktūrą.

Ampero dėsnis su Maksvelo pataisa

Amperas eksperimentiškai atrado dėsnį (1823 m.), kuris susieja magnetinio lauko integralą paviršiaus A uždaru kontūru ir elektros srovės, tekančios šiuo paviršiumi, integralą.

1865 metais Maksvelas ne tik išvedė šį dėsnį iš hidrodinamikos lygčių, bet ir modifikavo dėsnį kintančių laike srovių atvejui. Jis įvedė papildomą elektrinės indukcijos (elektrinio poslinkio) narį, šį lauką žymėsime D. Gautosios lygties struktūra tapo panaši į magnetinės indukcijos lygties struktūrą.

$$\partial_t \int_A \mathrm{D} \cdot da - \int_{\partial A} \mathrm{H} \cdot dl + \int_A \mathrm{J} \cdot da = 0,$$

čia H yra magnetinis laukas, J yra visų elektros srovių bendrasis tankis.

Panaudodami Stokso formulę gauname tris diferencialines lygtis

$$\partial_t \mathsf{D} - \nabla \times \mathsf{H} = -\mathsf{J}.$$

Panaudodami Stokso formulę gauname tris diferencialines lygtis

$$\partial_t \mathsf{D} - \nabla \times \mathsf{H} = -\mathsf{J}.$$

Dabar jau turime 6 diferencialines lygtis, bet net 12 nežinomųjų E, D, H, B.

Gauso dėsnis elektriniams laukams

Statinio elektrinio lauko linijos yra nukreiptos nuo teigiamų šaltinių link neigiamų ir bendras elektrinio lauko srautas per uždarą paviršių yra proporcingas šios srities viduje esančių šaltinių bendram tankiui.

Gauso dėsnis elektriniams laukams

Statinio elektrinio lauko linijos yra nukreiptos nuo teigiamų šaltinių link neigiamų ir bendras elektrinio lauko srautas per uždarą paviršių yra proporcingas šios srities viduje esančių šaltinių bendram tankiui.

$$\int_{\partial V} \mathsf{D} \cdot da - \int_V \rho dv = 0.$$

Panaudodami Gauso divergencijos teoremą

$$\int_V \operatorname{div} \mathsf{u} \, dv = \int_{\partial V} \mathsf{u} \cdot \mathsf{n} \, da,$$

gauname diferencialinę lygtį

$$\operatorname{div} \mathsf{D} - \rho = 0.$$

Gauso dėsnis magnetiniams laukams

Elektriniai krūviai neturi magnetinių analogų. Gausas parodė, kad magnetiniai laukai veikia dipolius (magnetukus) ir bendras srautas per uždarą paviršių yra lygus nuliui (nes dipolius galime įsivaizduoti atsirandančius poromis)

Gauso dėsnis magnetiniams laukams

Elektriniai krūviai neturi magnetinių analogų. Gausas parodė, kad magnetiniai laukai veikia dipolius (magnetukus) ir bendras srautas per uždarą paviršių yra lygus nuliui (nes dipolius galime įsivaizduoti atsirandančius poromis)

$$\int_{\partial V} \mathrm{B} \cdot da = 0.$$

Panaudodami Gauso divergencijos teoremą gauname diferencialinę lygtį

$$\operatorname{div} \mathrm{B} = 0.$$

Gauso dėsnis magnetiniams laukams

Elektriniai krūviai neturi magnetinių analogų. Gausas parodė, kad magnetiniai laukai veikia dipolius (magnetukus) ir bendras srautas per uždarą paviršių yra lygus nuliui (nes dipolius galime įsivaizduoti atsirandančius poromis)

$$\int_{\partial V} \mathrm{B} \cdot da = 0.$$

Panaudodami Gauso divergencijos teoremą gauname diferencialinę lygtį

$$\operatorname{div} \mathrm{B} = 0.$$

Dabar jau turime 8 diferencialines lygtis

Panagrinėkime detaliau Gauso dėsnius atitinkančias lygtis.
Pradėkime nuo dėsnio magnetiniams laukams

$$\operatorname{div} \mathrm{B} = 0.$$

Tokią sąlygą sutinkame ir Navjė-Stokso lygčių sistemose.

Panagrinėkime detaliau Gauso dėsnius atitinkančias lygtis.
Pradėkime nuo dėsnio magnetiniams laukams

$$\operatorname{div} \mathsf{B} = 0.$$

Tokią sąlygą sutinkame ir Navjė-Stokso lygčių sistemose.

Parodysime, kad ši lygtis yra suderinta su Maksvelo modelio lygtimi magnetinei indukcijai

$$\partial_t \mathsf{B} + \nabla \times \mathsf{E} = 0$$

ir apibrėžia reikalavimą pradinei sąlygai. Papildomai reikalausime, kad modelio sprendinys būtų pakankamai glodus.

Skaičiuojame magnetinės indukcijos lygties divergenciją

$$\partial_t \operatorname{div} \mathsf{B} + \operatorname{div}(\nabla \times \mathsf{E}) = 0,$$

ir pasinaudojame lygybe $\operatorname{div}(\nabla \times \mathsf{u}) \equiv 0$, tada gauname, kad

$$\partial_t \operatorname{div} \mathsf{B} = 0 \quad \rightarrow \quad \operatorname{div} \mathsf{B}\,(t) = \operatorname{div} \mathsf{B}\,(0) = 0.$$

Skaičiuojame magnetinės indukcijos lygties divergenciją

$$\partial_t \operatorname{div} \mathsf{B} + \operatorname{div}(\nabla \times \mathsf{E}) = 0,$$

ir pasinaudojame lygybe $\operatorname{div}(\nabla \times \mathsf{u}) \equiv 0$, tada gauname, kad

$$\partial_t \operatorname{div} \mathsf{B} = 0 \quad \rightarrow \quad \operatorname{div} \mathsf{B}\,(t) = \operatorname{div} \mathsf{B}\,(0) = 0.$$

Taigi, užtenka užduoti suderintą pradinę sąlygą

$$\operatorname{div} \mathsf{B}\,(0) = 0$$

ir tada Gauso dėsnis magnetiniams laukams yra suderintas su Maksvelo modelio lygtimi magnetinei indukcijai.

Dabar nagrinėkime Gauso dėsnį elektriniams laukams

$$\operatorname{div} \mathsf{D} = \rho.$$

Dabar nagrinėkime Gauso dėsnį elektriniams laukams

$$\operatorname{div} \mathsf{D} = \rho.$$

Šioje lygtyje naudojama papildoma funcija ρ, aprašanti elektrinio krūvio tankio pasiskirstymą.
Priminsime svarbų tokio krūvio tvermės dėsnį

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} \mathsf{J} = 0.$$

Dabar nagrinėkime Gauso dėsnį elektriniams laukams

$$\operatorname{div} \mathsf{D} = \rho.$$

Šioje lygtyje naudojama papildoma funcija ρ, aprašanti elektrinio krūvio tankio pasiskirstymą.
Priminsime svarbų tokio krūvio tvermės dėsnį

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} \mathsf{J} = 0.$$

Parodysime, kad iš šio dėsnio ir Maksvelo modelio lygties elektrinei indukcijai

$$\partial_t \mathsf{D} - \nabla \times \mathsf{H} = -\mathsf{J}$$

tinkamai parinkę pradines sąlygas gauname Gauso dėsnį elektriniams laukams.

Skaičiuojame lygties divergenciją

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t \operatorname{div}(\mathsf{D}) - \operatorname{div}\nabla \times \mathsf{H} + \operatorname{div}\mathsf{J} \\ &= \partial_t \left(\operatorname{div}(\mathsf{D}) - \rho\right). \end{aligned}$$

Tada

$$\left(\operatorname{div}\mathsf{D} - \rho\right)(t) = \left(\operatorname{div}\mathsf{D} - \rho\right)(0) = 0,$$

kai specialiai parenkame pradines sąlygas, o sprendiniai yra pakankamai tolydūs.

Skaičiuojame lygties divergenciją

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t \operatorname{div}(\mathsf{D}) - \operatorname{div}\nabla \times \mathsf{H} + \operatorname{div}\mathsf{J} \\ &= \partial_t \big(\operatorname{div}(\mathsf{D}) - \rho\big). \end{aligned}$$

Tada

$$\big(\operatorname{div}\mathsf{D} - \rho\big)(t) = \big(\operatorname{div}\mathsf{D} - \rho\big)(0) = 0,$$

kai specialiai parenkame pradines sąlygas, o sprendiniai yra pakankamai tolydūs.

Taigi Gauso lygtis pakeičia elektrinio krūvio tvermės dėsnį.

Abu modeliai gali būti naudojami skaičiuojant elektrinio krūvio tankio pasiskirstymą kiekvienu laiko momentu.

Norėdami "uždaryti" sistemą, turime ją papildyti 6 lygtimis, aprašančiomis sąryšius tarp nežinomųjų.

Norėdami "uždaryti" sistemą, turime ją papildyti 6 lygtimis, aprašančiomis sąryšius tarp nežinomųjų.

Jos gaunamos analizuojant medžiaginę aplinką (material laws), kurioje sklinda šie laukai. Nagrinėjami suvidurkinti laukų mikromodeliai ir jų sąveika su atomais ir molekulėmis.

$$\mathrm{D} = \mathrm{D}(\mathrm{E}, \mathrm{H}), \quad \mathrm{B} = \mathrm{B}(\mathrm{E}, \mathrm{H}).$$

Apsiribosime tiesinėmis nedispersinėmis mežiagomis, tada šie sąryšiai yra tokie

$$\mathrm{D} = \varepsilon \mathrm{E}, \quad \mathrm{B} = \mu \mathrm{H}, \quad \widetilde{\mathrm{J}} = \sigma \mathrm{E},$$

čia $\varepsilon = \varepsilon(X)$ yra dialektrinės skvarbos koeficientas (skaliarinė funkcija), $\mu = \mu(X)$ yra magnetinės skvarbos koeficientas, $\sigma = \sigma(X)$ yra elektrinio laidumo koeficientas.

Apsiribosime tiesinėmis nedispersinėmis mežiagomis, tada šie sąryšiai yra tokie

$$\mathsf{D} = \varepsilon \mathsf{E}, \quad \mathsf{B} = \mu \mathsf{H}, \quad \widetilde{\mathsf{J}} = \sigma \mathsf{E},$$

čia $\varepsilon = \varepsilon(X)$ yra dialektrinės skvarbos koeficientas (skaliarinė funkcija), $\mu = \mu(X)$ yra magnetinės skvarbos koeficientas, $\sigma = \sigma(X)$ yra elektrinio laidumo koeficientas.

Homogeniškose aplinkose šie koeficientai yra konstantos.

Dabar jau turime 6 lygtis

$$\partial_t (\mu H) + \nabla \times E = 0,$$
$$\partial_t(\varepsilon E) - \nabla \times H = -J$$

ir 6 nežinomuosius – elektromanetinių laukų E, H komponentes.

Dabar jau turime 6 lygtis

$$\partial_t (\mu \mathrm{H}) + \nabla \times \mathrm{E} = 0,$$
$$\partial_t (\varepsilon \mathrm{E}) - \nabla \times \mathrm{H} = -\mathrm{J}$$

ir 6 nežinomuosius – elektromanetinių laukų E, H komponentes.

Kitame seminare pakartosime Maksvelo skaičiavimus ir pamatysime, kad elektromagnetinės bangos vakuume juda tuo pačiu greičiu, kaip ir šviesa.

Taigi šviesa turėtų būti elektromagnetinių bangų atskiras atvejis.