Lauko teorijos matematiniai modeliai – netikėtumai, galimybės ir taikymai

R. Čiegis

Vilniaus Gedimino technikos universitetas
e-mail: rc@vgtu.lt

Rugsėjo 13 d., 2022, Vilnius

Seminarų cikle nagrinėsime matematinius modelius, kurie aprašomi lauko teorijos lygtimis.

Seminarų cikle nagrinėsime matematinius modelius, kurie aprašomi lauko teorijos lygtimis.

Mus domins tokie klausimai:

Seminarų cikle nagrinėsime matematinius modelius, kurie aprašomi lauko teorijos lygtimis.

Mus domins tokie klausimai:

Trumpas matematinų laukų apibrėžimas, kuo laukų modeliai skiriasi nuo kitų tipų modelių;

Seminarų cikle nagrinėsime matematinius modelius, kurie aprašomi lauko teorijos lygtimis.

Mus domins tokie klausimai:

Trumpas matematinų laukų apibrėžimas, kuo laukų modeliai skiriasi nuo kitų tipų modelių;

Kaip sudaromi tokie modeliai, kokio tipo matematinius uždavinius gauname;

Seminarų cikle nagrinėsime matematinius modelius, kurie aprašomi lauko teorijos lygtimis.

Mus domins tokie klausimai:

Trumpas matematinų laukų apibrėžimas, kuo laukų modeliai skiriasi nuo kitų tipų modelių;

Kaip sudaromi tokie modeliai, kokio tipo matematinius uždavinius gauname;

Skaitiniai sprendimo algoritmai. Mes gyvename virtualiosios tikrovės aplinkoje, ir jos tik daugės;

Pasirinkome du fundamentalius modelius:

Pasirinkome du fundamentalius modelius:

Maksvelo lygčių sistemą, modeliuojančią elektromagnetinius laukus;

Pasirinkome du fundamentalius modelius:

Maksvelo lygčių sistemą, modeliuojančią elektromagnetinius laukus;

Einšteino gravitacijos teorinį modelį.

Pasirinkome du fundamentalius modelius:

Maksvelo lygčių sistemą, modeliuojančią elektromagnetinius laukus;

Einšteino gravitacijos teorinį modelį.

Kodėl naudojame terminą fundamentalius modelius?

Pasirinkome du fundamentalius modelius:

Maksvelo lygčių sistemą, modeliuojančią elektromagnetinius laukus;

Einšteino gravitacijos teorinį modelį.

Kodėl naudojame terminą fundamentalius modelius?

Gravitacijos ir elektromagnetinė jėgos yra dvi iš keturių žinomų fundamentaliųjų sąveikų.

Pasirinkome du fundamentalius modelius:

Maksvelo lygčių sistemą, modeliuojančią elektromagnetinius laukus;

Einšteino gravitacijos teorinį modelį.

Kodėl naudojame terminą fundamentalius modelius?

Gravitacijos ir elektromagnetinė jėgos yra dvi iš keturių žinomų fundamentaliųjų sąveikų.

Iki 20 amžiaus trečiojo dešimtmečio vidurio daugiau fundamentaliųjų jėgų ir nebuvo žinoma, o jau minėta gravitacinė sąveika pilnai (???) suprasta tik prieš 30 metų (už šiuos darbus buvo skirtos dvi Nobelio premijos fizikos srityje).

Pradėkime nuo pirmos pastabos, kad ¿vairiose matematikos, fizikos ir gyvenimo srityse turime skirtingus lauko struktūros supratimus (ir poreikius).

Pradėkime nuo pirmos pastabos, kad įvairiose matematikos, fizikos ir gyvenimo srityse turime skirtingus lauko struktūros supratimus (ir poreikius).

Smagu išeiti į gamtą ir keliauti laukų takais, takeliais. Deja, šį kartą kalbėsime ne apie tai...

Pradėkime nuo pirmos pastabos, kad įvairiose matematikos, fizikos ir gyvenimo srityse turime skirtingus lauko struktūros supratimus (ir poreikius).

Smagu išeiti į gamtą ir keliauti laukų takais, takeliais. Deja, šį kartą kalbėsime ne apie tai...

Lauko teorija yra matematikos sritis, kuri tiria matematinių laukų savybes.

Pradėkime nuo pirmos pastabos, kad įvairiose matematikos, fizikos ir gyvenimo srityse turime skirtingus lauko struktūros supratimus (ir poreikius).

Smagu išeiti į gamtą ir keliauti laukų takais, takeliais. Deja, šį kartą kalbėsime ne apie tai...

Lauko teorija yra matematikos sritis, kuri tiria matematinių laukų savybes.

Laukas yra matematinė struktūra, kurioje apibrėžtos sudėties, atimties, daugybos ir dalybos operacijos.

Ypač svarbios yra asociatyvumo, komutatyvumo ir distributyvumo taisyklės.

Pradėkime nuo pirmos pastabos, kad įvairiose matematikos, fizikos ir gyvenimo srityse turime skirtingus lauko struktūros supratimus (ir poreikius).

Smagu išeiti į gamtą ir keliauti laukų takais, takeliais. Deja, šį kartą kalbėsime ne apie tai...

Lauko teorija yra matematikos sritis, kuri tiria matematinių laukų savybes.

Laukas yra matematinė struktūra, kurioje apibrėžtos sudėties, atimties, daugybos ir dalybos operacijos.

Ypač svarbios yra asociatyvumo, komutatyvumo ir distributyvumo taisyklės.

Užtenka paminėti rezultatus, gautus algebroje, kur lauko teorija yra apjungta su grupių teorija (tai ir kriptografijos dirvonai).

Nagrinėdami fizikinių reiškinių modelius laukus apibrėžiame kiek kitaip.

Nagrinėdami fizikinių reiškinių modelius laukus apibrėžiame kiek kitaip.

Tegul Ω yra erdvės (ar plokštumos) sritis.

Nagrinėdami fizikinių reiškinių modelius laukus apibrėžiame kiek kitaip.

Tegul Ω yra erdvės (ar plokštumos) sritis.

Srityje yra nusakytas skaliarinis laukas, jeigu kiekvienam srities Ω taškui $M \in \Omega$ pagal kokį nors dėsnį priskiriamas skaičius $U(M)$.

Taigi skaliarinis laukas yra funkcija $U : \Omega \to \mathbb{R}$.

Nagrinėdami fizikinių reiškinių modelius laukus apibrėžiame kiek kitaip.

Tegul Ω yra erdvės (ar plokštumos) sritis.

Srityje yra nusakytas skaliarinis laukas, jeigu kiekvienam srities Ω taškui $M \in \Omega$ pagal kokį nors dėsnį priskiriamas skaičius $U(M)$.

Taigi skaliarinis laukas yra funkcija $U : \Omega \to \mathbb{R}$.

Jei kiekvienam srities Ω taškui $M \in \Omega$ priskiriamas vektorius $\mathbf{u}(M)$, tai sakoma, kad srityje Ω yra apibrėžtas vektorinis laukas $\mathbf{u}$.

Taigi vektorinis laukas yra funkcija $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^3$.

Nagrinėdami fizikinių reiškinių modelius laukus apibrėžiame kiek kitaip.

Tegul Ω yra erdvės (ar plokštumos) sritis.

Srityje yra nusakytas skaliarinis laukas, jeigu kiekvienam srities Ω taškui $M \in \Omega$ pagal kokį nors dėsnį priskiriamas skaičius $U(M)$.

Taigi skaliarinis laukas yra funkcija $U : \Omega \to \mathbb{R}$.

Jei kiekvienam srities Ω taškui $M \in \Omega$ priskiriamas vektorius $\mathbf{u}(M)$, tai sakoma, kad srityje Ω yra apibrėžtas vektorinis laukas $\mathbf{u}$.

Taigi vektorinis laukas yra funkcija $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^3$.

Panašiai galime apibrėžti ir tenzorinį lauką.

Dažniausiai laukai kinta laike, taigi turime modeliuoti, kaip kiekvienu laiko momentu keičiasi lauko reikšmės kiekviename srities Ω taške.

Dažniausiai laukai kinta laike, taigi turime modeliuoti, kaip kiekvienu laiko momentu keičiasi lauko reikšmės kiekviename srities Ω taške.

Šią dinamiką aprašo atitinkamos matematinės lygtys ir jų sistemos. Kadangi nagrinėjame funkcijų erdvinę dinamiką, tai matematiniai modeliai yra aprašomi diferencialinėmis lygtimis dalinėmis išvestinėmis.

Dažniausiai laukai kinta laike, taigi turime modeliuoti, kaip kiekvienu laiko momentu keičiasi lauko reikšmės kiekviename srities Ω taške.

Šią dinamiką aprašo atitinkamos matematinės lygtys ir jų sistemos. Kadangi nagrinėjame funkcijų erdvinę dinamiką, tai matematiniai modeliai yra aprašomi diferencialinėmis lygtimis dalinėmis išvestinėmis.

Jų analizė pateikiama matemtinių fizikos lygčių kursuose, kuriuos rasite visų solidžių technikos universitetų studijų programose.

Negalime neaptarti dar vieno svarbaus aspekto, kuris labai jaudino Izaoką Niutoną. O ir mes vis dar nežinome galutinio atsakymo.

Negalime neaptarti dar vieno svarbaus aspekto, kuris labai jaudino Izaoką Niutoną. O ir mes vis dar nežinome galutinio atsakymo.

Niutoną išgarsino rezultatai, gauti sprendžiant optikos uždavinius. Tada sekė garsusis jo mokslinis veikalas *Philosophia Naturalis Principia Mathematica*, jame pateiktas ir gravitacijos jėgų modelis bei taikymai dangaus kūnų mechanikoje.

Negalime neaptarti dar vieno svarbaus aspekto, kuris labai jaudino Izaoką Niutoną. O ir mes vis dar nežinome galutinio atsakymo.

Niutoną išgarsino rezultatai, gauti sprendžiant optikos uždavinius. Tada sekė garsusis jo mokslinis veikalas *Philosophia Naturalis Principia Mathematica*, jame pateiktas ir gravitacijos jėgų modelis bei taikymai dangaus kūnų mechanikoje.

Ir kiekvieną kartą atsirado neišsprendžiamas teorinis dvilypumas:

Negalime neaptarti dar vieno svarbaus aspekto, kuris labai jaudino Izaoką Niutoną. O ir mes vis dar nežinome galutinio atsakymo.

Niutoną išgarsino rezultatai, gauti sprendžiant optikos uždavinius. Tada sekė garsusis jo mokslinis veikalas *Philosophia Naturalis Principia Mathematica*, jame pateiktas ir gravitacijos jėgų modelis bei taikymai dangaus kūnų mechanikoje.

Ir kiekvieną kartą atsirado neišsprendžiamas teorinis dvilypumas:

Šviesa yra dalelių judėjimas ar banga?

Negalime neaptarti dar vieno svarbaus aspekto, kuris labai jaudino Izaoką Niutoną. O ir mes vis dar nežinome galutinio atsakymo.

Niutoną išgarsino rezultatai, gauti sprendžiant optikos uždavinius. Tada sekė garsusis jo mokslinis veikalas *Philosophia Naturalis Principia Mathematica*, jame pateiktas ir gravitacijos jėgų modelis bei taikymai dangaus kūnų mechanikoje.

Ir kiekvieną kartą atsirado neišsprendžiamas teorinis dvilypumas:

Šviesa yra dalelių judėjimas ar banga?

Po ilgų apmąstymų Niutonas pasirinko dalelių modelį. Bet bangos modelis taip gražiai paaiškina šviesos interferenciją, difrakciją.

Niuotono gravitacinės lygtys yra puikios ir universalios – iš jų gaunami visus tris Keplerio dėsnius. Bet . . .

Niuotono gravitacinės lygtys yra puikios ir universalios – iš jų gauname visus tris Keplerio dėsnius. Bet ...
traukos dėsnis veikia tarp bet kurių masyvių kūnų begaliniu greičiu ir neaišku, kokia terpe šis poveikis sklinda.

Niuotono gravitacinės lygtys yra puikios ir universalios – iš jų gauname visus tris Keplerio dėsnius. Bet ...
traukos dėsnis veikia tarp bet kurių masyvių kūnų begaliniu greičiu ir neaišku, kokia terpe šis poveikis sklinda.

Tai buvo viena iš priežasčių, kodėl Niutonas ilgokai nepublikavo šių epochinių rezultatų.

Va čia ir pagelbėjo Maksvelo modelis, sukurtas 1862-1873 metais. Maksvelas parodė, kad šviesa yra elektromagnetinės bangos, sklindančios elektromagnetiniame lauke.

Va čia ir pagelbėjo Maksvelo modelis, sukurtas 1862-1873 metais. Maksvelas parodė, kad šviesa yra elektromagnetinės bangos, sklindančios elektromagnetiniame lauke.

Šis modelis pakeitė daugelį gyvenimo sričių, pvz. leido sukurti radiją, "pamatyti", išgirsti, įdarbinti kitas svarbias bangas (optinių bangų diapazonas yra labai siauras).

Va čia ir pagelbėjo Maksvelo modelis, sukurtas 1862-1873 metais. Maksvelas parodė, kad šviesa yra elektromagnetinės bangos, sklindančios elektromagnetiniame lauke.

Šis modelis pakeitė daugelį gyvenimo sričių, pvz. leido sukurti radiją, "pamatyti", išgirsti, įdarbinti kitas svarbias bangas (optinių bangų diapazonas yra labai siauras).

Taigi Niutonas buvo neteisus?

Va čia ir pagelbėjo Maksvelo modelis, sukurtas 1862-1873 metais. Maksvelas parodė, kad šviesa yra elektromagnetinės bangos, sklindančios elektromagnetiniame lauke.

Šis modelis pakeitė daugelį gyvenimo sričių, pvz. leido sukurti radiją, "pamatyti", išgirsti, įdarbinti kitas svarbias bangas (optinių bangų diapazonas yra labai siauras).

Taigi Niutonas buvo neteisus?
Neskubėkime taip teigti.

1900 metais Max Planck, spręsdamas juodojo kūnų spinduliavimo uždavinį, suformulavo svarbų postulatą, kad elektromagnetinė energija gali būti išspinduliuota tik porcijomis-kvantais:

$$E = h\nu,$$

čia h yra Planko konstanta, o ν spinduliuotės dažnis. Už šį darbą jam 1919 metais skirta 1918 metų Nobelio premija.

1900 metais Max Planck, spręsdamas juodojo kūnų spinduliavimo uždavinį, suformulavo svarbų postulatą, kad elektromagnetinė energija gali būti išspinduliuota tik porcijomis-kvantais:

$$E = h\nu,$$

čia h yra Planko konstanta, o ν spinduliuotės dažnis. Už šį darbą jam 1919 metais skirta 1918 metų Nobelio premija.

1905 metais A. Einšteinas išplėtojo šią teoriją ir paaiškino šviesos fotoelektrinį efektą:

1900 metais Max Planck, spręsdamas juodojo kūnų spinduliavimo uždavinį, suformulavo svarbų postulatą, kad elektromagnetinė energija gali būti išspinduliuota tik porcijomis-kvantais:

$$E = h\nu,$$

čia h yra Planko konstanta, o ν spinduliuotės dažnis. Už šį darbą jam 1919 metais skirta 1918 metų Nobelio premija.

1905 metais A. Einšteinas išplėtojo šią teoriją ir paaiškino šviesos fotoelektrinį efektą:
šviesos energija nepasiskirsto nepertraukiamai vis didėjančioje erdvėje, bet ją sudaro ribotas kiekis energijos kvantų, kurie yra lokalizuoti taškai erdvėje ir judėdami nesidalija, o juos sukurti arba sugerti galima tik kaip vientisą darinį. Už šį darbą jam 1922 metais paskirta 1921 metų Nobelio premija.

1900 metais Max Planck, spręsdamas juodojo kūnų spinduliavimo uždavinį, suformulavo svarbų postulatą, kad elektromagnetinė energija gali būti išspinduliuota tik porcijomis-kvantais:

$$E = h\nu,$$

čia h yra Planko konstanta, o ν spinduliuotės dažnis. Už šį darbą jam 1919 metais skirta 1918 metų Nobelio premija.

1905 metais A. Einšteinas išplėtojo šią teoriją ir paaiškino šviesos fotoelektrinį efektą:
šviesos energija nepasiskirsto nepertraukiamai vis didėjančioje erdvėje, bet ją sudaro ribotas kiekis energijos kvantų, kurie yra lokalizuoti taškai erdvėje ir judėdami nesidalija, o juos sukurti arba sugerti galima tik kaip vientisą darinį. Už šį darbą jam 1922 metais paskirta 1921 metų Nobelio premija.

Taigi šviesa visgi yra sudaryta iš dalelių ir Niutonas buvo teisus?

Ir vėl neskubėkime taip teigti.

Iš M. Planko bei A. Einšteino darbų sekė, kad šviesa pasižymi ne tik bangų, bet ir dalelių savybėmis. Šią mintį 1924 metais Luisas de Broilis išplėtė visoms medžiagos formoms. Jis teigė, kad bet kuri dalelė elgiasi kaip banga, kurios bangos ilgis λ yra atvirkščiai proporcingas jos judesio kiekiui (impulsui) p

$$\lambda = h/p.$$

Taigi turime bangų ir dalelių dualumą, kurį aiškina kvantinės mechanikos teorija.

Ir vėl neskubėkime taip teigti.

Iš M. Planko bei A. Einšteino darbų sekė, kad šviesa pasižymi ne tik bangų, bet ir dalelių savybėmis. Šią mintį 1924 metais Luisas de Broilis išplėtė visoms medžiagos formoms. Jis teigė, kad bet kuri dalelė elgiasi kaip banga, kurios bangos ilgis λ yra atvirkščiai proporcingas jos judesio kiekiui (impulsui) p

$$\lambda = h/p.$$

Taigi turime bangų ir dalelių dualumą, kurį aiškina kvantinės mechanikos teorija.

Niutonas buvo teisus abejodamas dėl šviesos prigimties ir negalėdamas pasirinkti tarp dalelės ir bangos.

Ir vėl neskubėkime taip teigti.

Iš M. Planko bei A. Einšteino darbų sekė, kad šviesa pasižymi ne tik bangų, bet ir dalelių savybėmis. Šią mintį 1924 metais Luisas de Broilis išplėtė visoms medžiagos formoms. Jis teigė, kad bet kuri dalelė elgiasi kaip banga, kurios bangos ilgis λ yra atvirkščiai proporcingas jos judesio kiekiui (impulsui) p

$$\lambda = h/p.$$

Taigi turime bangų ir dalelių dualumą, kurį aiškina kvantinės mechanikos teorija.

Niutonas buvo teisus abejodamas dėl šviesos prigimties ir negalėdamas pasirinkti tarp dalelės ir bangos.

Ar tai jau pabaiga? Vargu, nes populiariausia šiuo metu Kvantinė Lauko Teorija QFD remiasi samprata, kad kvantiniai laukai yra fundamentali ir universali materijos forma.

Pagrindinės vektorinių laukų operacijos

Imkime skaliarinį lauką $U : \Omega \to \mathbb{R}$ ir vektorinį lauką $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^3$.

Imkime skaliarinį lauką $U : \Omega \to \mathbb{R}$ ir vektorinį lauką $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^3$.

Gradiento operatorius:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} = \mathbf{i}\,\partial_1 + \mathbf{j}\,\partial_2 + \mathbf{k}\,\partial_3,$$

$$\mathrm{grad}\, U \equiv \nabla U = \mathbf{i}\,\partial_1 U + \mathbf{j}\,\partial_2 U + \mathbf{k}\,\partial_3 U.$$

Imkime skaliarinį lauką $U : \Omega \to \mathbb{R}$ ir vektorinį lauką $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^3$.

Gradiento operatorius:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} = \mathbf{i}\,\partial_1 + \mathbf{j}\,\partial_2 + \mathbf{k}\,\partial_3,$$

$$\operatorname{grad} U \equiv \nabla U = \mathbf{i}\,\partial_1 U + \mathbf{j}\,\partial_2 U + \mathbf{k}\,\partial_3 U.$$

Divergencijos operatorius:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} \equiv \nabla \cdot \mathbf{u} = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3.$$

Pagrindinės vektorinių laukų operacijos

Imkime skaliarinį lauką $U : \Omega \to \mathbb{R}$ ir vektorinį lauką $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^3$.

Gradiento operatorius:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} = \mathbf{i}\,\partial_1 + \mathbf{j}\,\partial_2 + \mathbf{k}\,\partial_3,$$

$$\mathrm{grad}\, U \equiv \nabla U = \mathbf{i}\,\partial_1 U + \mathbf{j}\,\partial_2 U + \mathbf{k}\,\partial_3 U.$$

Divergencijos operatorius:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{u} \equiv \nabla \cdot \mathbf{u} = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3.$$

Laplaso operatorius

$$\mathrm{div}\,(\mathrm{grad} U) \equiv \nabla \cdot (\nabla U) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2}.$$

Diferencialinis rotoriaus operatorius rot (arba curl)

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{u} &\equiv \operatorname{curl}(\mathbf{u}), \\
\nabla \times \mathbf{u} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 u_3 - \partial_3 u_2 \\ \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3 \\ \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 \end{pmatrix} \\
&= (\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2)\,\mathbf{i} + (\partial_3 u_1 - \partial_1 u_3)\,\mathbf{j} + (\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1)\,\mathbf{k}.
\end{aligned}
$$

Kodėl yra apibrėžti tokie operatoriai?

Kodėl yra apibrėžti tokie operatoriai?

O kodėl yra apibrėžtos ir ištirtos funkcijos $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\log(x)$, o ne kitokios?

Kodėl yra apibrėžti tokie operatoriai?

O kodėl yra apibrėžtos ir ištirtos funkcijos $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\log(x)$, o ne kitokios?

Pateiktieji operatoriai yra svarbūs sprendžiant daugelį fundamentinių ir taikomųjų uždavinių.

Kodėl yra apibrėžti tokie operatoriai?

O kodėl yra apibrėžtos ir ištirtos funkcijos $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\log(x)$, o ne kitokios?

Pateiktieji operatoriai yra svarbūs sprendžiant daugelį fundamentinių ir taikomųjų uždavinių.

Gradientas yra ta kryptis, kuria skaliarinė funkcija duotajame taške didėja grečiausiai (gauname vektorinį lauką).

Kodėl yra apibrėžti tokie operatoriai?

O kodėl yra apibrėžtos ir ištirtos funkcijos $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\log(x)$, o ne kitokios?

Pateiktieji operatoriai yra svarbūs sprendžiant daugelį fundamentinių ir taikomųjų uždavinių.

Gradientas yra ta kryptis, kuria skaliarinė funkcija duotajame taške didėja grečiausiai (gauname vektorinį lauką).

Divergencija pateikia vektorinio lauko (pvz. vandens tekėjimo) kiekviename taške sugeneruojamus srautus tenkančius vienetiniam tūriui (gauname skaliarinį lauką).

Kodėl yra apibrėžti tokie operatoriai?

O kodėl yra apibrėžtos ir ištirtos funkcijos $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\log(x)$, o ne kitokios?

Pateiktieji operatoriai yra svarbūs sprendžiant daugelį fundamentinių ir taikomųjų uždavinių.

Gradientas yra ta kryptis, kuria skaliarinė funkcija duotajame taške didėja grečiausiai (gauname vektorinį lauką).

Divergencija pateikia vektorinio lauko (pvz. vandens tekėjimo) kiekviename taške sugeneruojamus srautus tenkančius vienetiniam tūriui (gauname skaliarinį lauką).

Rotorius, apskaičiuotas duotojo vektorinio lauko taške, parodo ilgį ir kryptį vektoriaus, atitinkančio didžiausią sukinį (vėl gauname vektorinį lauką).

Gauso divergencijos teorema.

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{u} \, dv = \int_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, da,$$

čia $\mathbf{n}$ yra paviršiaus ∂V išorinė normalė.

Gauso divergencijos teorema.

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{u} \, dv = \int_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, da,$$

čia $\mathbf{n}$ yra paviršiaus ∂V išorinė normalė.

Imkite $\mathbf{u} = \nabla U$, $V = [x_0, x_0 + dx] \times [y_0, y_0 + dy] \times [z_0, z_0 + dz]$ ir pritaikykite Gauso divergencijos teoremą.

Kaip gautąjį rezultatą naudojame baigtinių tūrių metode aproksimuodami Laplaso operatorių?

Stokso teorema.

$$\int_A (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}\, da = \int_{\partial A} \mathbf{u} \cdot \tau\, dl.$$

Čia **n** yra paviršiaus A išorinė normalė (vektorinis laukas), o $\tau : \partial A \to \mathrm{R}^3$ tangentinis vektorinis laukas.

Kreivės ∂A apėjimo kryptis yra suderinta su **n** kryptimi.