Lauko teorijos matematiniai modeliai – Maksvelo lygčių sistema ir jos analizė

R. Čiegis

Vilniaus Gedimino technikos universitetas
e-mail: rc@vgtu.lt

Lapkričio 8 d., 2022, Vilnius

Seminare susipažinsime, kaip sprendžiamos paprasčiausios Maksvelo lygčių sistemos.

Ypač įdomus rezultatas gaunamas nagrinėjant elektromagnetinių bangų judėjimą vakuume – tada judėjimo greitis nepriklauso nuo bangos ilgio ir jis lygus šviesos greičiui.

Seminare susipažinsime, kaip sprendžiamos paprasčiausios Maksvelo lygčių sistemos.

Ypač įdomus rezultatas gaunamas nagrinėjant elektromagnetinių bangų judėjimą vakuume – tada judėjimo greitis nepriklauso nuo bangos ilgio ir jis lygus šviesos greičiui.

Taigi atsiranda labai stipri hipotezė, kad šviesa yra atskiras elektromagnetinių bangų atvejis.

Nagrinėkime atvejį, kai nėra krūvininkų ($\rho \equiv 0$) ir išsorinių srovių ($J_a \equiv 0$).

Tada turime tokią lygčių sistemą

Nagrinėkime atvejį, kai nėra krūvininkų ($\rho \equiv 0$) ir išorinių srovių ($J_a \equiv 0$).

Tada turime tokią lygčių sistemą

$$
\begin{aligned}
&\partial_t (\mu \mathbf{H}) + \nabla \times \mathbf{E} = 0, \\
&\operatorname{div} (\mu \mathbf{H}) = 0, \\
&\partial_t (\varepsilon \mathbf{E}) - \nabla \times \mathbf{H} = -\sigma \mathbf{E}, \\
&\operatorname{div} (\varepsilon \mathbf{E}) = 0.
\end{aligned}
$$

Nagrinėkime atvejį, kai nėra krūvininkų ($\rho \equiv 0$) ir iššorinių srovių ($J_a \equiv 0$).

Tada turime tokią lygčių sistemą

$$\begin{aligned}
&\partial_t (\mu \mathbf{H}) + \nabla \times \mathbf{E} = 0,\\
&\operatorname{div} (\mu \mathbf{H}) = 0,\\
&\partial_t (\varepsilon \mathbf{E}) - \nabla \times \mathbf{H} = -\sigma \mathbf{E},\\
&\operatorname{div} (\varepsilon \mathbf{E}) = 0.
\end{aligned}$$

Nesunkiai patikriname, kad teisingas tvermės dėsnis:

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} J = 0,$$

nes $J = \varepsilon \mathbf{E}$. Taigi Gauso dėsnių reikalavimai persikelia į pradinių sąlygų parinkimą.

Dabar papildomai tarsime, kad elektrinės ir magnetinės skvarbos koeficientai ε, μ bei indukcijos koeficientas σ yra konstantos.

Dabar papildomai tarsime, kad elektrinės ir magnetinės skvarbos koeficientai ε, μ bei indukcijos koeficientas σ yra konstantos. Tada diferencijuokime pvz. elektrinio lauko lygtį pagal t:

$$\varepsilon\, \partial_t^2\, (\mathbf{E}) - \nabla \times \partial_t \mathbf{H} = -\sigma\, \partial_t \mathbf{E}.$$

Dabar papildomai tarsime, kad elektrinės ir magnetinės skvarbos koeficientai ε, μ bei indukcijos koeficientas σ yra konstantos. Tada diferencijuokime pvz. elektrinio lauko lygtį pagal t:

$$\varepsilon\, \partial_t^2 \left(\mathbf{E}\right) - \nabla \times \partial_t \mathbf{H} = -\sigma\, \partial_t \mathbf{E}.$$

Iš Maksvelo sistemos pirmosios lygties gauname

$$\varepsilon\, \partial_t^2 \left(\mathbf{E}\right) + \frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \sigma\, \partial_t \mathbf{E} = 0.$$

Dabar papildomai tarsime, kad elektrinės ir magnetinės skvarbos koeficientai ε, μ bei indukcijos koeficientas σ yra konstantos. Tada diferencijuokime pvz. elektrinio lauko lygtį pagal t:

$$\varepsilon\, \partial_t^2\,(\mathbf{E}) - \nabla \times \partial_t \mathbf{H} = -\sigma\, \partial_t \mathbf{E}.$$

Iš Maksvelo sistemos pirmosios lygties gauname

$$\varepsilon\, \partial_t^2\,(\mathbf{E}) + \frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \sigma\, \partial_t \mathbf{E} = 0.$$

Nesunku patikrinti, kad

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= \nabla\Big(\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{div}\big(\varepsilon\, \mathbf{E}\big)\Big) - \Delta \mathbf{E} \\ &= -\Delta \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Operatorius Δ yra apibrėžtas taip:

$$\Delta U = \partial_1^2 U + \partial_2^2 U + \partial_3^2 U.$$

Operatorius Δ yra apibrėžtas taip:

$$\Delta U = \partial_1^2 U + \partial_2^2 U + \partial_3^2 U.$$

Pažymėkime

$$c^2 = \frac{1}{\mu\varepsilon},$$

čia c turi greičio dimensiją.

Operatorius Δ yra apibrėžtas taip:

$$\Delta U = \partial_1^2 U + \partial_2^2 U + \partial_3^2 U.$$

Pažymėkime

$$c^2 = \frac{1}{\mu\varepsilon},$$

čia c turi greičio dimensiją.
Tada gauname tokią vektorinę elektrinio lauko lygtį

$$\partial_t^2 \mathbf{E} - c^2 \Delta \mathbf{E} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \partial_t \mathbf{E} = 0.$$

Operatorius Δ yra apibrėžtas taip:

$$\Delta U = \partial_1^2 U + \partial_2^2 U + \partial_3^2 U.$$

Pažymėkime

$$c^2 = \frac{1}{\mu\varepsilon},$$

čia c turi greičio dimensiją.
Tada gauname tokią vektorinę elektrinio lauko lygtį

$$\partial_t^2 \mathbf{E} - c^2 \Delta \mathbf{E} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \partial_t \mathbf{E} = 0.$$

Matome, kad ir visų elektrinio lauko komponenčių lygtys (jos skaliarinės) atsiskiria.

Sistemos lygtys yra susiejamos per pradines sąlygas

$$\mathbf{E}(X,0) = \mathbf{E}_0(X), \quad \mathbf{H}(X,0) = \mathbf{H}_0(X),$$
$$\partial_t \mathbf{H}(X,0) = \frac{1}{\mu}\nabla \times \mathbf{E}_0(X),$$
$$\partial_t \mathbf{E}(X,0) = \frac{1}{\varepsilon}\nabla \times \mathbf{H}_0(X) - \frac{\sigma}{\varepsilon}\mathbf{E}_0(X).$$

Sistemos lygtys yra susiejamos per pradines sąlygas

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}(X,0) = \mathbf{E}_0(X), \quad \mathbf{H}(X,0) = \mathbf{H}_0(X), \\
&\partial_t \mathbf{H}(X,0) = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E}_0(X), \\
&\partial_t \mathbf{E}(X,0) = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{H}_0(X) - \frac{\sigma}{\varepsilon} \mathbf{E}_0(X).
\end{aligned}
$$

1. Toks modelis yra gautas padarius prielaidą, kad sprendiniai yra tolydūs ir terpė yra homogeniška.

2. Atlikdami visas transformacijas nenagrinėjome kraštinių sąlygų poveikio (darėme prielaidą, kad sritis yra begalinė, arba kraštinių sąlygų narių poveikis neatsiranda transformuotose lygtyse).

Apskaičiuosime konstantos (greičio) c reikšmę, kai elektromagnetinė banga sklinda vakuume:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}.$$

Maksvelas jau turėjo pakankamai tikslias skvarbos koeficientų reikšmes:

$$\mu = 4\pi \times 10^{-7}\, N/A^2, \quad \varepsilon = 8.8541878176 \times 10^{-12}\, F/m.$$

Tada gauname, kad

$$c^2 = \frac{1}{4\pi \times 0.88541878176} \times 10^{18} \;\rightarrow\; c = 299792458\, m/s.$$

Apskaičiuosime konstantos (greičio) c reikšmę, kai elektromagnetinė banga sklinda vakuume:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}.$$

Maksvelas jau turėjo pakankamai tikslias skvarbos koeficientų reikšmes:

$$\mu = 4\pi \times 10^{-7}\, N/A^2, \quad \varepsilon = 8.8541878176 \times 10^{-12}\, F/m.$$

Tada gauname, kad

$$c^2 = \frac{1}{4\pi \times 0.88541878176} \times 10^{18} \;\to\; c = 299792458\, m/s.$$

O šią reikšmę visi fizikai jau gerai žinojo.

Čia labai svarbu aptarti fizikų požiūrį į sukurtus matematinius modelius, jų teikiamą informaciją.

Taip pat apžvelgsime matematikų analizės svarbiausius tikslus – rasime tuos tiltus, kurie sieja abi kryptis.

Čia labai svarbu aptarti fizikų požiūrį į sukurtus matematinius modelius, jų teikiamą informaciją.

Taip pat apžvelgsime matematikų analizės svarbiausius tikslus – rasime tuos tiltus, kurie sieja abi kryptis.

Fizikus domina, kaip sutverta ir funkcionuoja Gamta. Matematinis modelis yra tik Gamtos (jos atskirų dalių) aproksimacija. Jeigu ji pakankamai tiksli, tai galime prognozuoti procesų eigą, surasti naujas daleles, materijos virsmus, paaiškinti Visatos evoliuciją.

Čia labai svarbu aptarti fizikų požiūrį į sukurtus matematinius modelius, jų teikiamą informaciją.

Taip pat apžvelgsime matematikų analizės svarbiausius tikslus – rasime tuos tiltus, kurie sieja abi kryptis.

Fizikus domina, kaip sutverta ir funkcionuoja Gamta. Matematinis modelis yra tik Gamtos (jos atskirų dalių) aproksimacija. Jeigu ji pakankamai tiksli, tai galime prognozuoti procesų eigą, surasti naujas daleles, materijos virsmus, paaiškinti Visatos evoliuciją.

Esminė fizikinės analizės paradigma, kad net negalima klausti, ar yra įrodyta, jog sukurtas matematinis modelis (pvz. Maksvelo lygčių sistema) yra tikslus.

Svarbu tik tikrinti, ar pasitvirtina išvados, kurias gauname iš matematinio modelio.

Matematinės analizės tikslai yra puikiai formalizuoti:

a) Tiriame, ar modelis turi sprendinį.

Matematinės analizės tikslai yra puikiai formalizuoti:

a) Tiriame, ar modelis turi sprendinį.

Fizikams ši situacija turi aiškią interpretaciją: pvz. iš kasdieninės patirties žinome, kad obuolys visada krenta nuo medžio ant žemės, taigi gravitacinis modelis, kuris tvirtins, jog taip gali ir nebūti jiems neaktualus.

b) Tiriame, ar modelio sprendinys yra vienintelis,

Matematinės analizės tikslai yra puikiai formalizuoti:

a) Tiriame, ar modelis turi sprendinį.

Fizikams ši situacija turi aiškią interpretaciją: pvz. iš kasdieninės patirties žinome, kad obuolys visada krenta nuo medžio ant žemės, taigi gravitacinis modelis, kuris tvirtins, jog taip gali ir nebūti jiems neaktualus.

b) Tiriame, ar modelio sprendinys yra vienintelis,

Fizikai dažnai vienatį vertina šiek tiek kitaip: pvz. gerai žinome, kad $n \times n$ dydžio simetrinė matrica A gali turėti n skirtingų realiųjų tikrinių reikšmių, arba kai kurios iš jų bus kartotinės. Fizikinė vienaties interpretacija yra: ar gali egzistuoti kitas tikrinių reikšmių ir tikrinių funkcijų rinkinys?

c) Sukurti algoritmus, leidžiančius apskaičiuoti sprendinius.

Tai jau konstruktyvus matematinio tyrimo rezultatas, bet kaip tik ši matematinės analizės dalis yra arčiausiai fizikus dominančių klausimų.

c) Sukurti algoritmus, leidžiančius apskaičiuoti sprendinius.

Tai jau konstruktyvus matematinio tyrimo rezultatas, bet kaip tik ši matematinės analizės dalis yra arčiausiai fizikus dominančių klausimų.

Bet ir čia fizikai lanksčiai reaguoja į atsirandačius iššūkius: jeigu sprendimo algoritme atsiranda sunkumai, pvz. skaičių eilutė diverguoja, jie išradingai pakeičia tokių eilučių sumas (atlieka normalizavimą), o netvirtina, kad matematinis modelis yra blogas.

Pavyzdžiui gerai žinome, kad begalinė skaičių eilutė

$$\sum_{n=1}^{\infty} n$$

diverguoja.

Pavyzdžiui gerai žinome, kad begalinė skaičių eilutė

$$\sum_{n=1}^{\infty} n$$

diverguoja.

Fizikai atlieka normalizavimo veiksmą

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = -\frac{1}{12}$$

ir, remdamiesi šia lygybe, sėkmingai sprendžia juos dominančius sudėtingus kvantinės mechanikos modelius.

Pavyzdžiui gerai žinome, kad begalinė skaičių eilutė

$$\sum_{n=1}^{\infty} n$$

diverguoja.

Fizikai atlieka normalizavimo veiksmą

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = -\frac{1}{12}$$

ir, remdamiesi šia lygybe, sėkmingai sprendžia juos dominančius sudėtingus kvantinės mechanikos modelius.

Faktiškai, taip jie pakeičia matematinį modelį, bet tai atlieka neišrekštiniu būdu ir gauna efektyvius algoritmus, leidžiančius labai tiksliai modeliuoti Gamtą.

Beje, matematikoje mes irgi naudojame panašią technologiją.

Beje, matematikoje mes irgi naudojame panašią technologiją.

Spręsdami nekorektiškus matematinius uždavinius (tokie yra visi atvirkštiniai uždaviniai), juos reguliarizuojame. Tokiu būdu sprendžiame jau pakeistą uždavinį, tačiau jo savybės jau daug geriau sąlygotos.

Beje, matematikoje mes irgi naudojame panašią technologiją.

Spręsdami nekorektiškus matematinius uždavinius (tokie yra visi atvirkštiniai uždaviniai), juos reguliarizuojame. Tokiu būdu sprendžiame jau pakeistą uždavinį, tačiau jo savybės jau daug geriau sąlygotos.

Matematinio modeliavimo technologija, kai keičiame uždavinio parametrus, koeficientus, įvedame (formaliai) papildomus narius, kad tiksliau aproksimuotume turimus eksperimentinius duomenis.

Prisiminkime matematinės fizikos paskaitose pateikiamus rezultatus. Nagrinėkime vieną skaliarinę lygtį

$$\partial_t^2 u - c^2 \Delta u + \tilde{\sigma} \partial_t u = 0.$$

Prisiminkime matematinės fizikos paskaitose pateikiamus rezultatus. Nagrinėkime vieną skaliarinę lygtį

$$\partial_t^2 u - c^2 \Delta u + \tilde{\sigma} \partial_t u = 0.$$

Ieškosime tokio pavidalo sprendinio

$$u(\mathbf{X}, t) = \exp\big(i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{X})\big),$$

čia $\mathbf{k}$ yra banginis skaičius (vektorius), o ω – bangos dažnis.

Prisiminkime matematinės fizikos paskaitose pateikiamus rezultatus. Nagrinėkime vieną skaliarinę lygtį

$$\partial_t^2 u - c^2 \Delta u + \tilde{\sigma} \partial_t u = 0.$$

Ieškosime tokio pavidalo sprendinio

$$u(\mathbf{X}, t) = \exp\big(i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{X})\big),$$

čia **k** yra banginis skaičius (vektorius), o ω – bangos dažnis.

Iš diferencialinės lygties gauname dispersinį sąryšį:

$$-\omega^2 + c^2 |\mathbf{k}|^2 + \tilde{\sigma} i \omega = 0.$$

Jeigu $\sigma = 0$, tai

$$\omega(\mathbf{k}) = c|\mathbf{k}|, \quad c = \frac{\omega(\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|}.$$

Terpė yra nedispersinė, jeigu bangos greičiai nepriklauso nuo bangos dažnio (taip yra vakuume).

Jeigu $\sigma = 0$, tai
$$\omega(\mathbf{k}) = c|\mathbf{k}|, \quad c = \frac{\omega(\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|}.$$

Terpė yra nedispersinė, jeigu bangos greičiai nepriklauso nuo bangos dažnio (taip yra vakuume).

Nagrinėkime vienamatį atvejį $n = 1$. Tada harmoninė banga yra tokios formos:
$$u(x, t) = \exp\left(i(\omega t - kx)\right),$$
bangos skaičius išreiškiamas per bangos ilgį λ
$$k = 2\pi/\lambda,$$
o ω yra kampinis dažnis
$$\omega = 2\pi f,$$
čia f yra dažnis.

Prisiminsime labai naudingus analizinių sprendinių atvejus, jie naudojami ir nagrinėjant skaitinius Maksvelo lygčių sprendimo metodus.

Prisiminsime labai naudingus analizinių sprendinių atvejus, jie naudojami ir nagrinėjant skaitinius Maksvelo lygčių sprendimo metodus.

Nagriėkime pradinį uždavinį:

$$\begin{aligned} &\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u, \quad t > 0, \\ &u(x,0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x,0) = v_0(x). \end{aligned}$$

Tada sprendinį užrašome tokia forma

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(u_0(x-ct) + u_0(x+ct)\big) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(y)dy.$$