

SPECIALIOJI RELIATYVUMO TEORIJA, TAI PAPRASTA

Raimondas Čiegis

Matematinio modeliavimo katedra, e-paštas: rc@vgtu.lt

Sausio 1 d., 2024

Teorija remiasi tik dviem postulatais:

1. Visi fiziniai gamtos procesai **inertinėse atskaitos sistemoje** vyksta vienodai.

Inertinės atskaitos sistemos – tai tokios atskaitos sistemos, kurios viena kitos atžvilgiu juda tiesiai ir tolygiai (jose galioja pirmasis Niutono dėsnis).

Teorija remiasi tik dviem postulatais:

1. Visi fiziniai gamtos procesai **inertinėse atskaitos sistemose** vyksta vienodai.

Inertinės atskaitos sistemos – tai tokios atskaitos sistemos, kurios viena kitos atžvilgiu juda tiesiai ir tolygiai (jose galioja pirmasis Niutono dėsnis).

2. Tuščioje erdvėje **šviesa** visada sklinda greičiu **c**, kuris nepriklauso nei nuo šviesos šaltinio, nei nuo stebėtojo judėjimo.

Tarkime, kad turime vieną stebėtoją A (You), kuris nejuda, ir kitą stebėtoją B (Lenny), kuris juda greičiu v .

Laiko momentu t keliautojas B bus koordinatėje

$$x = vt.$$

Tarkime, kad turime vieną stebėtoją A (You), kuris nejuda, ir kitą stebėtoją B (Lenny), kuris juda greičiu v .

Laiko momentu t keliautojas B bus koordinatėje

$$x = vt.$$

Su B susiekime naują atskaitos sistemą:

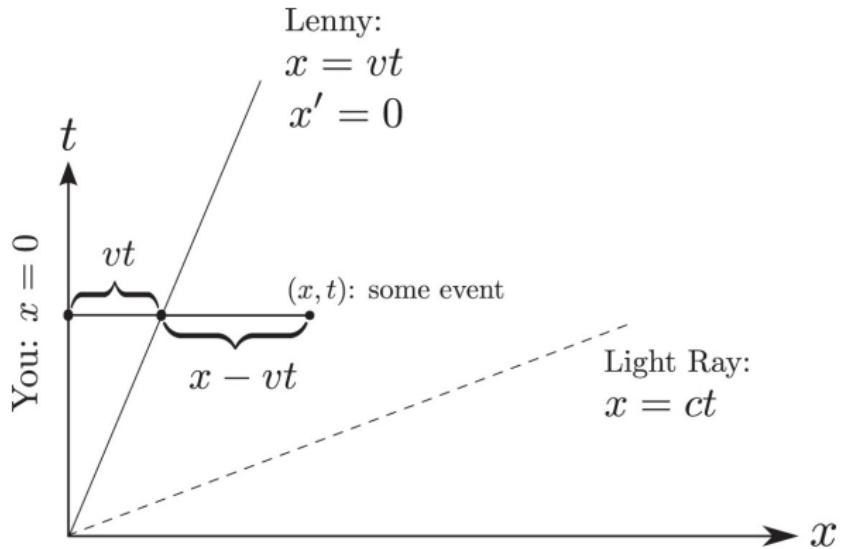
$$t' = t,$$

$$x' = x - vt.$$

Tada judančioje atskaitos sistemoje B koordinate x' yra lygi

$$x' = 0,$$

t.y. ji yra pastovi visais laiko momentais.



Patikrinkime, kaip šviesos (lazerio spindulio) judėjimą mato skirtinį stebėtojai.

Patikrinkime, kaip šviesos (lazerio spindulio) judėjimą mato skirtingi stebėtojai.

Pirmasis scenarijus: A pašviečia j dešinę pusę, o B juda ta pačia kryptimi greičiu v. Kokiu greičiu judės šviesa judančioje atskaitos sistemoje?

Patikrinkime, kaip šviesos (lazerio spindulio) judėjimą mato skirtingi stebėtojai.

Pirmasis scenarijus: A pašviečia j dešinę pusę, o B juda ta pačia kryptimi greičiu v . Kokiu greičiu judės šviesa judančioje atskaitos sistemoje?

Laiko momentu t lazerio spindulys bus taške: $x = ct$.

Patikrinkime, kaip šviesos (lazerio spindulio) judėjimą mato skirtingi stebėtojai.

Pirmasis scenarijus: A pašviečia j dešinę pusę, o B juda ta pačia kryptimi greičiu v . Kokiu greičiu judės šviesa judančioje atskaitos sistemoje?

Laiko momentu t lazerio spindulys bus taške: $x = ct$.

Galime apskaičiuoti ir atvirkštinį sąryšį tarp abiejų atskaitos sistemų koordinacijų

$$t = t', \\ x = x' + vt'.$$

Tada gauname atsakymą $x' = (c - v)t'$.

Patikrinkime, kaip šviesos (lazerio spindulio) judėjimą mato skirtingi stebėtojai.

Pirmasis scenarijus: A pašviečia j dešinę pusę, o B juda ta pačia kryptimi greičiu v . Kokiu greičiu judės šviesa judančioje atskaitos sistemoje?

Laiko momentu t lazerio spindulys bus taške: $x = ct$.

Galime apskaičiuoti ir atvirkštinį sąryšį tarp abiejų atskaitos sistemų koordinacijų

$$t = t', \\ x = x' + vt'.$$

Tada gauname atsakymą $x' = (c - v)t'$.

Matome, kad A. Einšteino postulatas **neišpildytas**.

Jeigu A pašviečia lazeriu į kairę pusę, tai judančioje atskaitos sistemoje šis taškas judės pagal tokį dėsnį

$$x' = -(c + v)t'.$$

Jeigu A pašviečia lazeriu j kairę pusę, tai judančioje atskaitos sistemoje šis taškas judės pagal tokį dėsnį

$$x' = -(c + v)t'.$$

Bet visi esame bent jau girdėjė, kad niekas negali judėti greičiu didesniu už šviesos greitį tuštumoje.

Antrasis scenarijus: B juda į dešinę pusę greičiu v ir pašviečia lazeriuku į tą pačią pusę. Kokiu greičiu judės šviesa A atžvilgiu (nejudančios atskaitos sistemos atžvilgiu)?

Antrasis scenarijus: B juda į dešinę pusę greičiu v ir pašviečia lazeriku į tą pačią pusę. Kokiu greičiu judės šviesa A atžvilgiu (nejudančios atskaitos sistemos atžvilgiu)?

Pirmiausia apibrėžkime atskaitos sistemą, susietą su B (naujos laiko koordinatės nerašysime, ji sutampa su nejudančios atskaitos sistemos laiku):

$$x' = x - vt.$$

Antrasis scenarijus: B juda į dešinę pusę greičiu v ir pašviečia lazeriku į tą pačią pusę. Kokiu greičiu judės šviesa A atžvilgiu (nejudančios atskaitos sistemos atžvilgiu)?

Pirmiausia apibrėžkime atskaitos sistemą, susietą su B (naujos laiko koordinatės nerašysime, ji sutampa su nejudančios atskaitos sistemos laiku):

$$x' = x - vt.$$

Tada apibrėžkime ir atskaitos sistemą, susietą su šviesos signalu (ji juda B sistemos atžvilgiu)

$$x'' = x' - ct.$$

Antrasis scenarijus: B juda į dešinę pusę greičiu v ir pašviečia lazeriku į tą pačią pusę. Kokiu greičiu judės šviesa A atžvilgiu (nejudančios atskaitos sistemos atžvilgiu)?

Pirmiausia apibrėžkime atskaitos sistemą, susietą su B (naujos laiko koordinatės nerašysime, ji sutampa su nejudančios atskaitos sistemos laiku):

$$x' = x - vt.$$

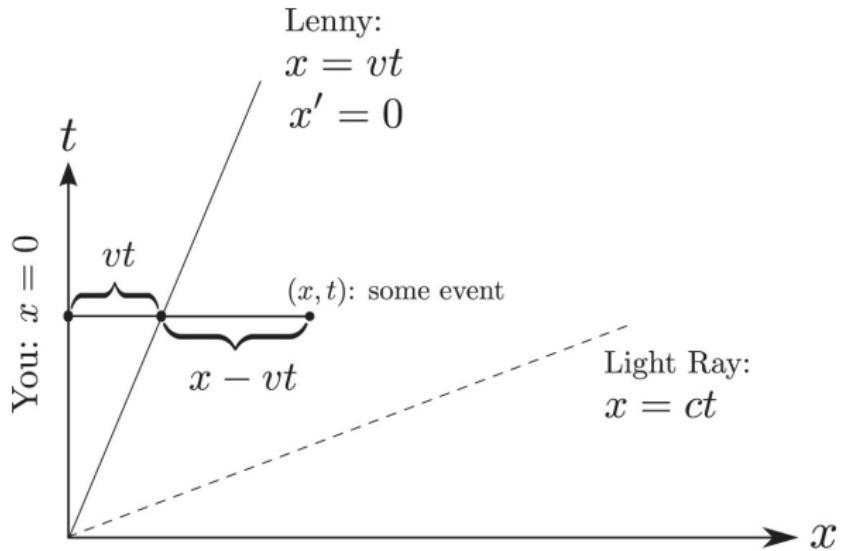
Tada apibrėžkime ir atskaitos sistemą, susietą su šviesos signalu (ji juda B sistemos atžvilgiu)

$$x'' = x' - ct.$$

Nesunku parodyti, kaip juda lazerio taškas stovinčio stebėtojo A atžvilgiu

$$x'' = x - (c + v)t,$$

taigi judėjimo greitis vėl **didesnis** už c .



Kaip galime apibūdinti atskaitos sistemos (t, x) ašis?

Laikrodžių sinchronizavimas stacionarioje atskaitos sistemoje

Visuose x ašies taškuose laikas $t = 0$, taigi visi laikrodžiai rodo tą patį laiką (tai ir yra x ašies matematinis apibrėžimas).

Laikrodžių sinchronizavimas stacionarioje atskaitos sistemoje

Visuose x ašies taškuose laikas $t = 0$, taigi visi laikrodžiai rodo tą patį laiką (tai ir yra x ašies matematinis apibrėžimas).

Kaip eksperimentiškai sinchronizuosime laikrodžius, kad jie rodytu tokį patį laiką, kaip ir stebėtojo A laikrodis taške $x = 0$?

Laikrodžių sinchronizavimas stacionarioje atskaitos sistemoje

Visuose x ašies taškuose laikas $t = 0$, taigi visi laikrodžiai rodo tą patį laiką (tai ir yra x ašies matematinis apibrėžimas).

Kaip eksperimentiškai sinchronizuosime laikrodžius, kad jie rodytų tokį patį laiką, kaip ir stebėtojo A laikrodis taške $x = 0$?

Sakykime norime sinchronizuoti stebėtojo C taške x laikrodį. Tada pasitelkiame j pagalbą dar vieną stebėtoją D , kuris yra vidurio taške $x/2$.

Laikrodžių sinchronizavimas stacionarioje atskaitos sistemoje

Visuose x ašies taškuose laikas $t = 0$, taigi visi laikrodžiai rodo tą patį laiką (tai ir yra x ašies matematinis apibrėžimas).

Kaip eksperimentiškai sinchronizuosime laikrodžius, kad jie rodytų tokį patį laiką, kaip ir stebėtojo A laikrodis taške $x = 0$?

Sakykime norime sinchronizuoti stebėtojo C taške x laikrodį. Tada pasitelkiame j pagalbą dar vieną stebėtoją D , kuris yra vidurio taške $x/2$.

Eksperimento eiga: A ir C laiko momentu 12 : 00 pasiunčia šviesos signalus stebėtojui D .

Laikrodžių sinchronizavimas stacionarioje atskaitos sistemoje

Visuose x ašies taškuose laikas $t = 0$, taigi visi laikrodžiai rodo tą patį laiką (tai ir yra x ašies matematinis apibrėžimas).

Kaip eksperimentiškai sinchronizuosime laikrodžius, kad jie rodytų tokį patį laiką, kaip ir stebėtojo A laikrodis taške $x = 0$?

Sakykime norime sinchronizuoti stebėtojo C taške x laikrodj. Tada pasitelkiame j pagalbą dar vieną stebėtoją D , kuris yra vidurio taške $x/2$.

Eksperimento eiga: A ir C laiko momentu 12 : 00 pasiunčia šviesos signalus stebėtojui D .

Jeigu D abu signalus gauna tuo pačiu metu, tai A ir C laikrodžiai rodo tą patį laiką. Priešingu atveju D nurodo pataisą, kurią turi atlikti C .

Laikrodžių synchronizavimas judančioje atskaitos sistemoje

Pritaikysime tą pačią eksperimentinę schemą.

Pirmiausia apibrėžiame **relatyvistinę vienetų sistemą**, kai ir laiko, ir **atstumo** matavimo vienetai yra išreiškiami sekundėmis.

Pirmiausia apibrėžiame **relatyvistinę vienetų sistemą**, kai ir laiko, ir **atstumo** matavimo vienetai yra išreiškiami sekundėmis.

Laiko vienetu lieka **viena sekundė**.

Pirmiausia apibrėžiame **relatyvistinę vienetų sistemą**, kai ir laiko, ir **atstumo** matavimo vienetai yra išreiškiami sekundėmis.

Laiko vienetu lieka **viena sekundė**.

Atstumas yra matuojamas **šviesos-sekundėmis**.

Tai yra atstumas, kurj šviesa **nuskinda per vieną sekundę**.

$$x = c\tilde{x}.$$

Pirmiausia apibrėžiame **relatyvistinę vienetų sistemą**, kai ir laiko, ir **atstumo** matavimo vienetai yra išreiškiami sekundėmis.

Laiko vienetu lieka **viena sekundė**.

Atstumas yra matuojamas **šviesos-sekundėmis**.

Tai yra atstumas, kurj šviesa **nuskinda per vieną sekundę**.

$$x = c\tilde{x}.$$

Šioje vienetų sistemoje greitis \tilde{v} tampa bedimensiniu:

$$v = c\tilde{v} \quad \Rightarrow \quad \tilde{v} = \frac{v}{c},$$

o šviesos greitis $\tilde{c} = 1$.

Art:

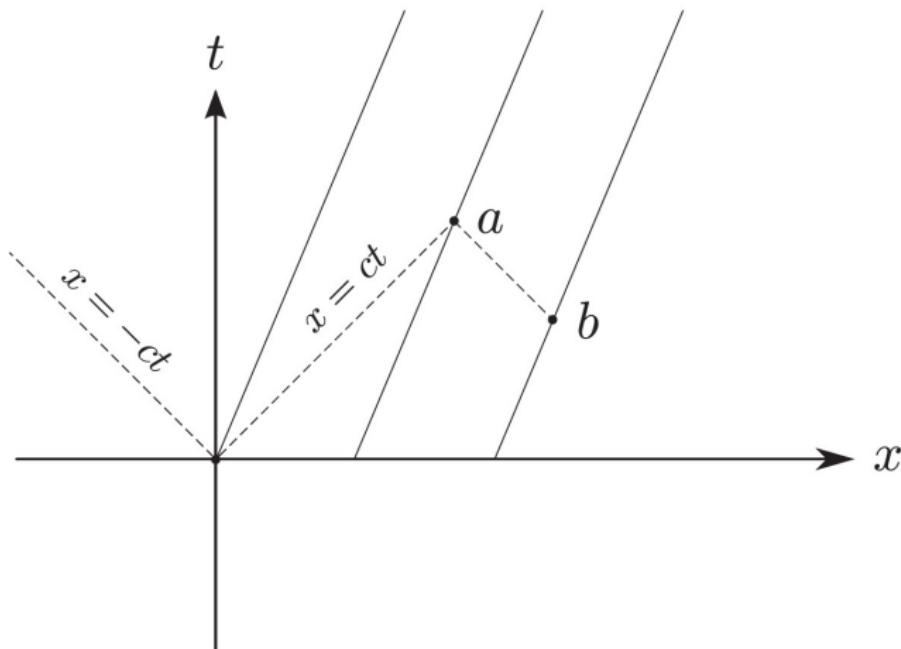
$$x = vt$$
$$x' = 0$$

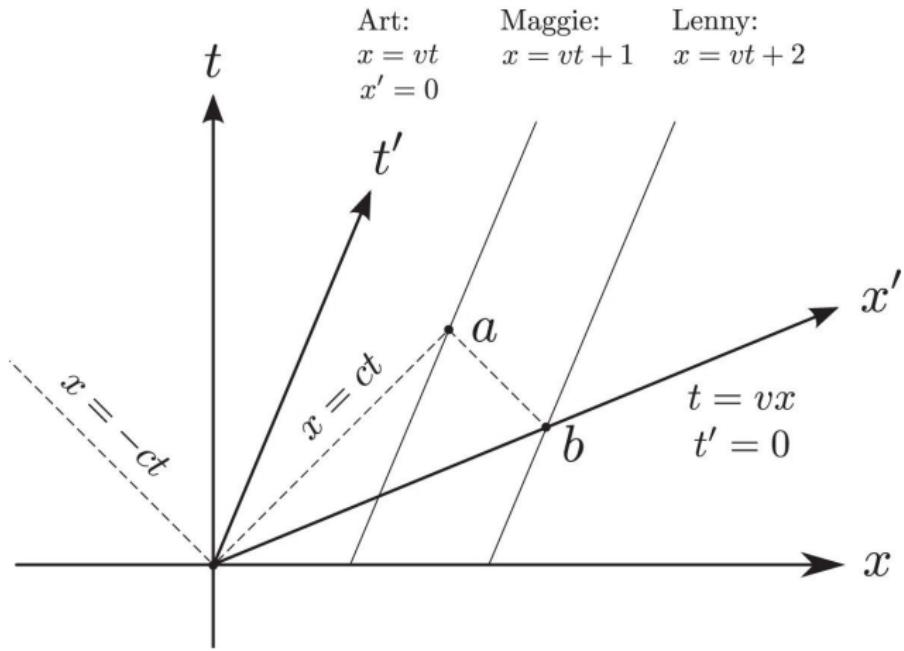
Maggie:

$$x = vt + 1$$

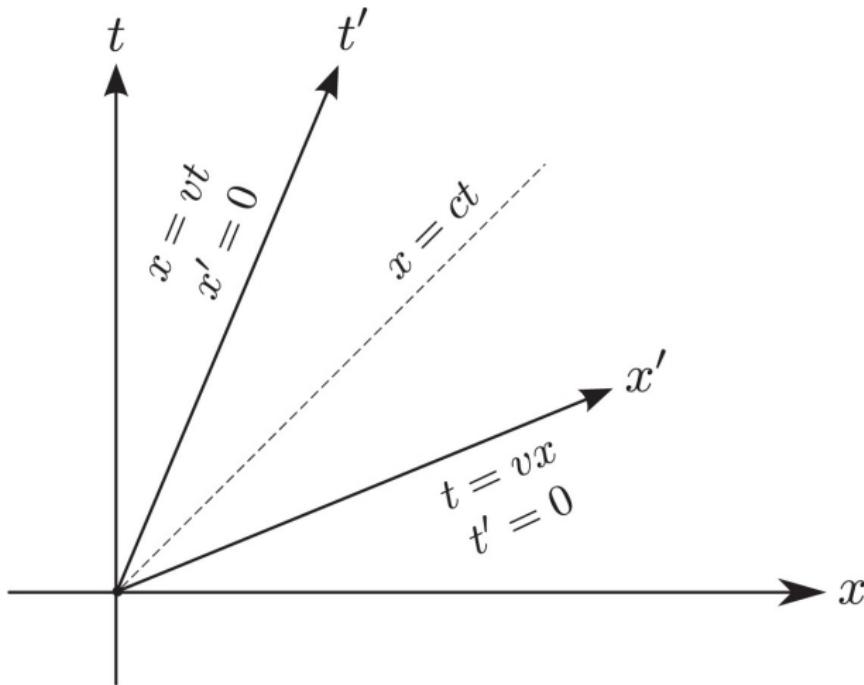
Lenny:

$$x = vt + 2$$





Stacionari ir judanti atskaitos sistemos



Koordinačių transformacija

Užrašykime bendriausios koordinačių transformacijos formules,
atitinkančias judančios inertinės atskaitos sistemos koordinačių ašis

$$x' = (x - vt)f(v),$$

$$t' = (t - vx)g(v).$$

Koordinačių transformacija

Užrašykime bendriausios koordinačių transformacijos formules, atitinkančias judančios inertinės atskaitos sistemos koordinačių ašis

$$x' = (x - vt)f(v),$$

$$t' = (t - vx)g(v).$$

Toliau pasinaudosime A. Eišteino pateikta nesudėtinga fizikine analize.

Pirma, inertinėse atskaitos sistemose egzistuoja simetrija tarp judėjimo į dešinę ir į kairę puses. Tai yra fizikos dėsniai nereikalauja, kad judėjimą į dešinę pusę atitiktų teigiamą greičio reikšmę, o į kairę – neigiamą.

Koordinačių transformacija

Užrašykime bendriausios koordinačių transformacijos formules, atitinkančias judančios inertinės atskaitos sistemos koordinačių ašis

$$\begin{aligned}x' &= (x - vt)f(v), \\t' &= (t - vx)g(v).\end{aligned}$$

Toliau pasinaudosime A. Eišteino pateikta nesudėtinga fizikine analize.

Pirma, inertinėse atskaitos sistemose egzistuoja simetrija tarp judėjimo į dešinę ir į kairę puses. Tai yra fizikos dėsniai nereikalauja, kad judėjimą į dešinę pusę atitiktų teigiamą greičio reikšmę, o į kairę – neigiamą.

Paprastiausias sąryšis, tenkinantis šį reikalavimą, gaunams padarius prialaidą, kad funkcijos f ir g priklauso nuo v^2

$$\begin{aligned}x' &= (x - vt)f(v^2), \\t' &= (t - vx)g(v^2).\end{aligned}$$

Antra, nagrinėkime šviesos spindulio judėjimą abiejose atskaitos sistemose.

Antra, nagrinėkime šviesos spindulio judėjimą abiejose atskaitos sistemose.

Priminsime antrają A. Enšteino prielaidą, kad šviesos greitis visos inertinėse koordinačių sistemose yra tokis pat $c = 1$.

Antra, nagrinėkime šviesos spindulio judėjimą abiejose atskaitos sistemose.

Priminsime antrają A. Enšteino prielaidą, kad šviesos greitis visos inertinėse koordinačių sistemose yra tokis pat $c = 1$.

Tada gauname tokias šviesos judėjimo lygtis

$$x = t, \quad x' = t'.$$

Antra, nagrinėkime šviesos spindulio judėjimą abiejose atskaitos sistemose.

Priminsime antrają A. Enšteino prielaidą, kad šviesos greitis visos inertinėse koordinačių sistemose yra tokis pat $c = 1$.

Tada gauname tokias šviesos judėjimo lygtis

$$x = t, \quad x' = t'.$$

Irašę šiuos sąryšius į koordinačių transformacijos lygtis, gauname

$$x' = x(1 - v)f(v^2),$$

$$t' = t(1 - v)g(v^2),$$

taigi $f(v^2) = g(v^2)$ ir turime transformacijos lygtis

$$x' = (x - vt)f(v^2),$$

$$t' = (t - vx)f(v^2).$$

Trečia, dar Niutono teorijoje matėme, kad inertinėse atskaitos sistemose negalime pasakyti, kuris stebėtojas juda, o kuris yra stacionarus.

Aš negaliu nustatyti ar keliauju j dešinę nuo stovinčio draugo, o gal jis juda j kairę, kai aš lieku toje pačioje vietoje.

Trečia, dar Niutono teorijoje matėme, kad inertinėse atskaitos sistemose negalime pasakyti, kuris stebėtojas juda, o kuris yra stacionarus.

Aš negaliu nustatyti ar keliauju j dešinę nuo stovinčio draugo, o gal jis juda j kairę, kai aš lieku toje pačioje vietoje.

Taigi užrašome koordinačių transformacijos lygtis, kai laikome, jog antrasis stebėtojas stovi vietoje, o pirmasis juda j kairę greičiu ($-v$)

$$x = (x' + vt')f(v^2),$$
$$t = (t' + vx')f(v^2).$$

Trečia, dar Niutono teorijoje matėme, kad inertinėse atskaitos sistemose negalime pasakyti, kuris stebėtojas juda, o kuris yra stacionarus.

Aš negaliu nustatyti ar keliauju j dešinę nuo stovinčio draugo, o gal jis juda j kairę, kai aš lieku toje pačioje vietoje.

Taigi užrašome koordinačių transformacijos lygtis, kai laikome, jog antrasis stebėtojas stovi vietoje, o pirmasis juda j kairę greičiu ($-v$)

$$x = (x' + vt')f(v^2),$$
$$t = (t' + vx')f(v^2).$$

Pirmosios sistemos abi lygtis jrašome j antrosios sistemos pirmąjį lygtį:

$$x = ((x - vt)f(v^2) + v(t - vx)f(v^2))f(v^2),$$
$$x = x(1 - v^2)f^2(v^2) \Rightarrow f(v^2) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Lorentzo transformacija

Matome, kad gautoji koordinačių transformacija sutampa su Lorentzo transformacija (norint paaiškinti Michelson-Morley eksperimento rezultatus)

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}},$$
$$t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Lorentzo transformacija

Matome, kad gautoji koordinačių transformacija sutampa su Lorentzo transformacija (norint paaiškinti Michelson-Morley eksperimento rezultatus)

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}},$$
$$t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Jeigu naudojame įprastinius erdvės matavimo vienetus, tai gauname tokias formules

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}},$$
$$t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Prisiminkime jau mūsų nagrinėtą situaciją, kai judančioje greičiu v sistemoje (pvz. traukinyje), vienas keleivis pradeda bėgti greičiu u.

Prisiminkime jau mūsų nagrinėtą situaciją, kai judančioje greičiu v sistemoje (pvz. traukinyje), vienas keleivis pradeda bėgti greičiu u.

Kokiu greičiu šis keleivis judės stovinčio perone stebėtojo atžvilgiu?

Prisiminkime jau mūsų nagrinėtą situaciją, kai judančioje greičiu v sistemoje (pvz. traukinyje), vienas keleivis pradeda bėgti greičiu u .

Kokiu greičiu šis keleivis judės stovinčio perone stebėtojo atžvilgiu?

Parodykite, kad jo greitis bus

$$w = \frac{u + v}{1 + uv}.$$

Prisiminkime jau mūsų nagrinėtą situaciją, kai judančioje greičiu v sistemoje (pvz. traukinyje), vienas keleivis pradeda bėgti greičiu u .

Kokių greičiu šis keleivis judės stovinčio perone stebėtojo atžvilgiu?

Parodykite, kad jo greitis bus

$$w = \frac{u + v}{1 + uv}.$$

Imkite, kaip pvz. $u = 0.8$ ir $v = 0.8$.

Prisiminkime jau mūsų nagrinėtą situaciją, kai judančioje greičiu v sistemoje (pvz. traukinyje), vienas keleivis pradeda bėgti greičiu u .

Kokių greičiu šis keleivis judės stovinčio perone stebėtojo atžvilgiu?

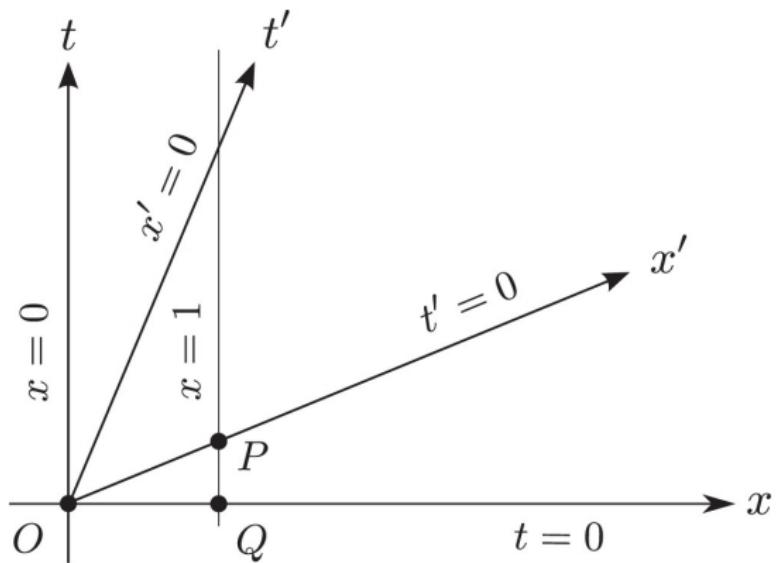
Parodykite, kad jo greitis bus

$$w = \frac{u + v}{1 + uv}.$$

Imkite, kaip pvz. $u = 0.8$ ir $v = 0.8$.

O jeigu $u = 1$?

Atstumo sutrumpėjimas judančioje atskaitos sistemoje



Stacionarioje atskaitos sistemoje imkime tašką Q , jo koordinatė $x = 1$, ilgi matuojame liniuote, toks matavimas abiejuose taškuose O ir Q atliekamas tuo pačiu laiko momentu $t = 0$.

Norėdami išmatuoti liniuotės ilgį judančioje atskaitos sistemoje turime atlikti matavimą tame pačiame erdvės taške $x = 1$ (judėjimas vyksta vienmatėje erdvėje ir ji nekinta), bet **kitu laiko momentu**, synchronizuotu su pradinio taško O laiku $t' = 0$.

Turime rasti atkarpos OP ilgi, tai yra taško P koordinatės x' reikšmę.

Turime rasti atkarpos OP ilgi, tai yra taško P koordinatės x' reikšmę.

Sprendžiame tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x = 1, \\ t - vx = 0. \end{cases}$$

Turime rasti atkarpos OP ilgi, tai yra taško P koordinatės x' reikšmę.

Sprendžiame tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x = 1, \\ t - vx = 0. \end{cases}$$

Gauname taško P koordinates nejudančioje atskaitos sistemoje
 $x = 1, t = v$.

Turime rasti atkarpos OP ilgi, tai yra taško P koordinatės x' reikšmę.

Sprendžiame tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x = 1, \\ t - vx = 0. \end{cases}$$

Gauname taško P koordinates nejudančioje atskaitos sistemoje
 $x = 1, t = v$.

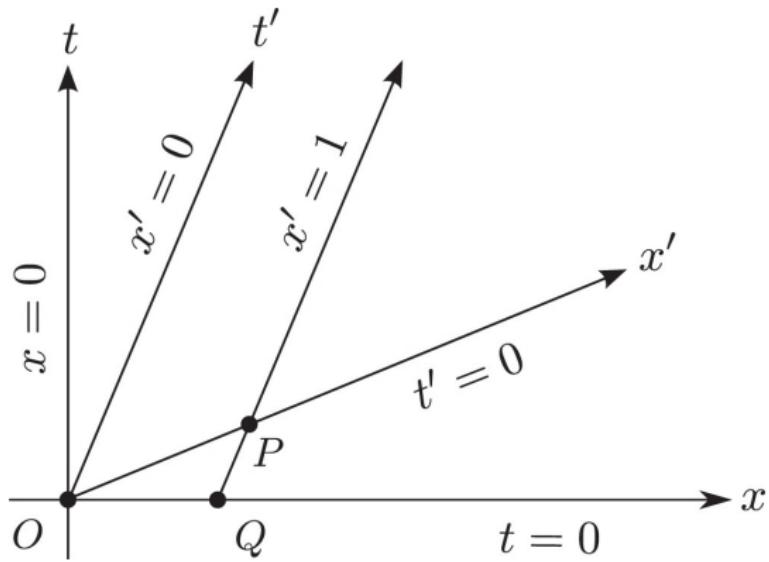
Panaudodami Lorentzo transformaciją apskaičiuojame

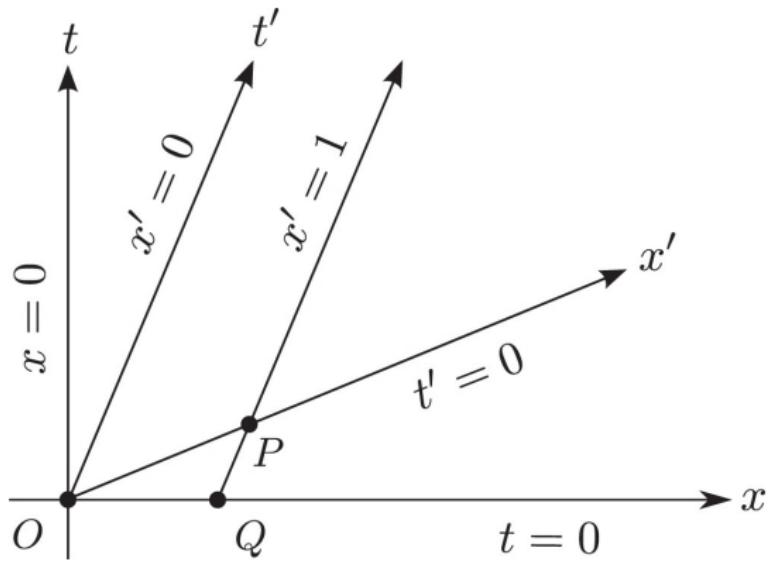
$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{1 - v^2}{\sqrt{1 - v^2}} = \sqrt{1 - v^2}.$$

Bet reliatyvumo principas (taip pat ir Niutono teorijoje) tvirtina, kad visos tarpusavyje inertinės atskaitos sistemas yra lygiavertės.

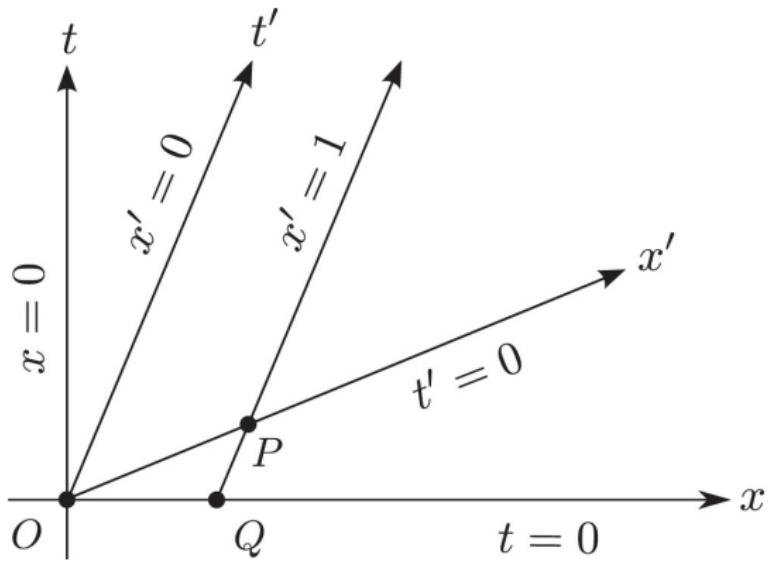
Bet reliatyvumo principas (taip pat ir Niutono teorijoje) tvirtina, kad visos tarpusavyje inertinės atskaitos sistemos yra lygiavertės.

Kokią reikšmę gaus nejudantis stebėtojas vertindamas mano judančios koordinačių sistemos vienetinj ilgj?





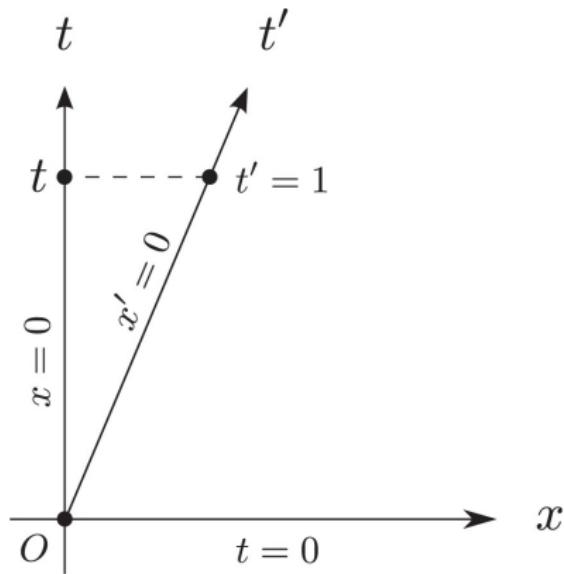
Parodykite, kad $x_Q = \sqrt{1 - v^2}$.



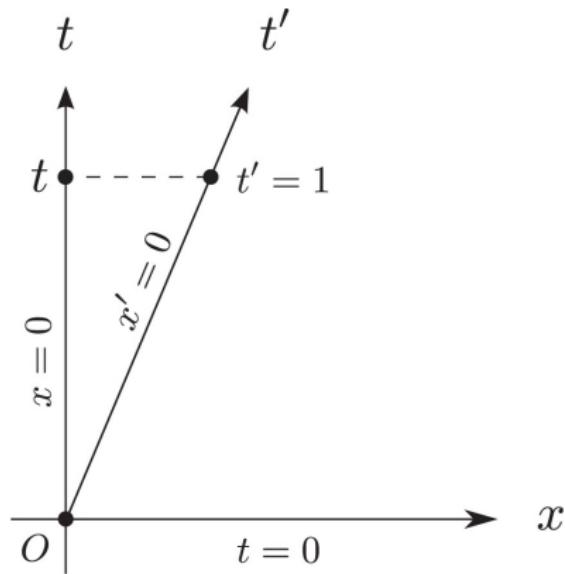
Parodykite, kad $x_Q = \sqrt{1 - v^2}$.

Hint: užrašykite lygtį $x' = 1$ nejudančioje atskaitos sistemoje kaip $x = vt + x_Q$.

Laiko sutrumpėjimas

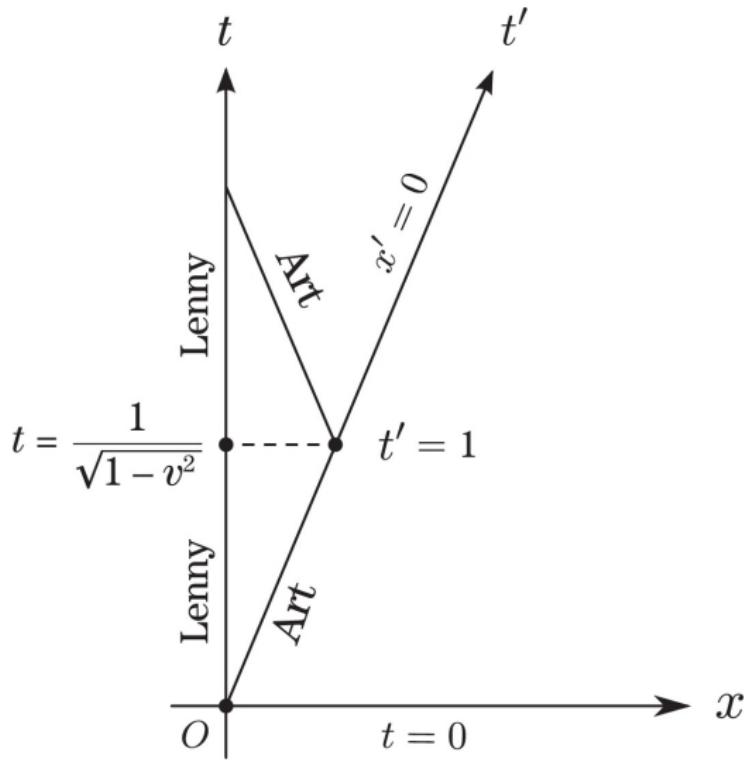


Laiko sutrumpėjimas



Parodykite, kad nejudančio stebėtojo laikrodis rodo, jog praėjo $t = 1/\sqrt{1 - v^2}$ sekundžių, kai judančio stebėtojo atskaitos sistemoje praėjo tik $t' = 1$ sekundė. Kaip tai patikrinti eksperimente?

Dvynių paradoksas



Tarkime, kad Artas juda greičiu $v = 0.8$ ir per penkis metus ($t = 5$) nuskrenda iki artimiausios Saulei žvaigždės Kentauro Proksimos (atstumas iki jos keturi šviesmečiai).

Tarkime, kad Artas juda greičiu $v = 0.8$ ir per penkis metus ($t = 5$) nuskrenda iki artimiausios Saulei žvaigždės Kentauro Proksimos (atstumas iki jos keturi šviesmečiai).

Panaudodami Lorentzo transformaciją apskaičiuojame, kad jo laikrodis rodo, jog judančioje atskaitos sistemoje

$$t' = (5 - 0.8 \times 4) / 0.6 = 3.$$

Tarkime, kad Artas juda greičiu $v = 0.8$ ir per penkis metus ($t = 5$) nuskrenda iki artimiausios Saulei žvaigždės Kentauro Proksimos (atstumas iki jos keturi šviesmečiai).

Panaudodami Lorentzo transformaciją apskaičiuojame, kad jo laikrodis rodo, jog judančioje atskaitos sistemoje

$$t' = (5 - 0.8 \times 4) / 0.6 = 3.$$

Tada Artas apsisuka ir grjžta į Žemę. Jis pamato, kad brolis paseno 10 metų, kai Artui praėjo tik 6 metai.

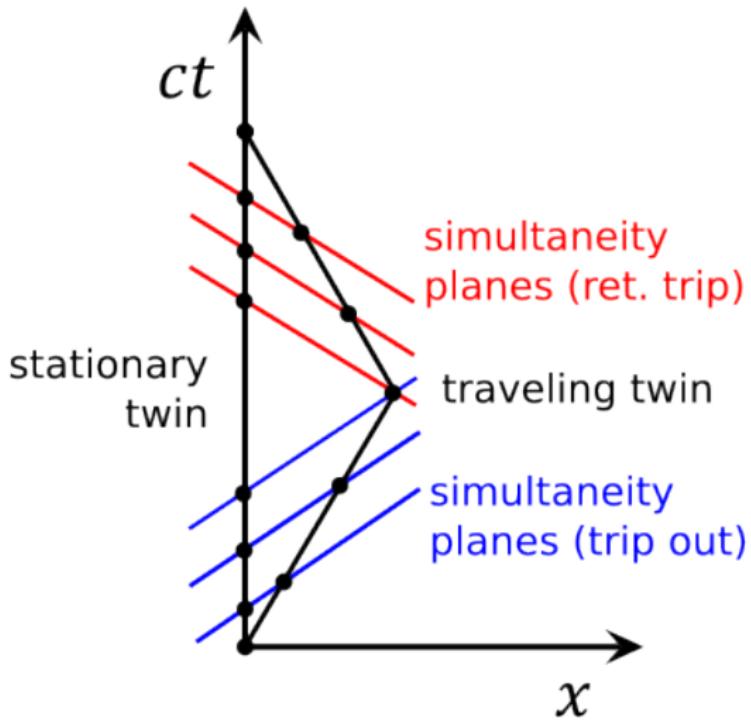
Tarkime, kad Artas juda greičiu $v = 0.8$ ir per penkis metus ($t = 5$) nuskrenda iki artimiausios Saulei žvaigždės Kentauro Proksimos (atstumas iki jos keturi šviesmečiai).

Panaudodami Lorentzo transformaciją apskaičiuojame, kad jo laikrodis rodo, jog judančioje atskaitos sistemoje

$$t' = (5 - 0.8 \times 4) / 0.6 = 3.$$

Tada Artas apsisuka ir grjžta į Žemę. Jis pamato, kad brolis paseno 10 metų, kai Artui praėjo tik 6 metai.

Lenny ir Arto kelionės nėra simetriškos. Lenny visus 10 metų gyveno toje pačioje atskaitos sistemoje, kai Artas gyveno dviejose sistemose, jis keitė judėjimo kryptį.



Nagrinėkime pateiktą pavyzdį, kai laikome jog Artas nejuda, o "skrenda" Lenny ir jo greitis $u = -0.8$. Grafike pavaizduotos mėlynos tiesės, atitinkančios x' ašis skirtingais laiko momentais.

Nagrinėkime pateiktą pavyzdį, kai laikome jog Artas nejuda, o "skrenda" Lenny ir jo greitis $u = -0.8$. Grafike pavaizduotos mėlynos tiesės, atitinkančios x' ašis skirtingais laiko momentais.

Aišku, kad Lenny **virtualaus** judėjimo kreivė

$$x' = -0.8t' \Rightarrow x'' = 0, \quad t'' = 0.6t'.$$

Nagrinėkime pateiktą pavyzdį, kai laikome jog Artas nejuda, o "skrenda" Lenny ir jo greitis $u = -0.8$. Grafike pavaizduotos mėlynos tiesės, atitinkančios x' ašis skirtingais laiko momentais.

Aišku, kad Lenny **virtualaus** judėjimo kreivė

$$x' = -0.8t' \Rightarrow x'' = 0, \quad t'' = 0.6t'.$$

Kadangi $u + v = 0$, tai naujoji atskaitos sistema sutampa su nejudančiomis koordinatėmis. Artas vertins, kad Lenny turėjo pasenti tik 1.8 metais.

Nagrinėkime pateiktą pavyzdį, kai laikome jog Artas nejuda, o "skrenda" Lenny ir jo greitis $u = -0.8$. Grafike pavaizduotos mėlynos tiesės, atitinkančios x' ašis skirtingais laiko momentais.

Aišku, kad Lenny **virtualaus** judėjimo kreivė

$$x' = -0.8t' \Rightarrow x'' = 0, \quad t'' = 0.6t'.$$

Kadangi $u + v = 0$, tai naujoji atskaitos sistema sutampa su nejudančiomis koordinatėmis. Artas vertins, kad Lenny turėjo pasenti tik 1.8 metais.

Taigi, kuris iš dviejų dvynių sensta greičiau?

Kadangi šiame eksperimente Artas ir Lenny nesusitinka, tai jie negali tiesiogiai palyginti savo laikrodžių parodymų.

Pateiktieji rezultatai remėsi netiesioginiu matavimu, kai Artas pasitelkė revizorių, su kuriuo jų laikrodžiai yra synchronizuoti. Revizorius pradiniu laiko momentu $t' = 0$ buvo taške $x' = -2.4$. Apskaičiuosime jo koordinates nejudančioje atskaitos sistemoje

$$x = -4, \quad t = -3.2.$$

Artas paprašė pasakyti, kokį laiką rodys laikrodžiai nejudančioje atskaitos sistemoje, kai revizoriaus laikrodis rodys $t' = 3$ valandas:

$$x = 0, \quad t = 1.8.$$

Taigi reikšmė tikrai 1.8, tačiau mus domina, kiek praėjo laiko nuo revizoriaus starto.

Gauname, kad [Gamtos negalima apgauti](#)

$$1.8 - (-3.2) = 5.$$

Visgi toks laiko sutrumpėjimas tampa realiu, jei Lenny tikrai pradeda judėti greičiu $u = -0.8$ koordinačių sistemoje judančioje greičiu $v = 0.8$.

Visgi toks laiko sutrumpėjimas tampa realiu, jei Lenny tikrai pradeda judėti greičiu $u = -0.8$ koordinačių sistemoje judančioje greičiu $v = 0.8$.

Geriausia analogija yra eskalatorius, kai galima bėgti žemyn tuo pačiu greičiu, kuriuo eskalatorius kyla į viršų.

Visgi toks laiko sutrumpėjimas tampa realiu, jei Lenny tikrai pradeda judėti greičiu $u = -0.8$ koordinačių sistemoje judančioje greičiu $v = 0.8$.

Geriausia analogija yra eskalatorius, kai galima bėgti žemyn tuo pačiu greičiu, kuriuo eskalatorius kyla į viršų.

Praėjus trims metams Lenny pasensta tik 1.8 metais.

Praėjus 1.8 metams Lenny apsisuka ir tuo pačiu greičiu skrenda link nejudančio Arto. Jis **pamato**, kad brolis paseno 6 metais, kai Lenny praėjo tik 3.6 metai.

Praėjus 1.8 metams Lenny apsisuka ir tuo pačiu greičiu skrenda link nejudančio Arto. Jis **pamato**, kad brolis paseno 6 metais, kai Lenny praėjo tik 3.6 metai.

Tada Lenny ir Artas apsuka raketą ir kartu gržta į Žemę. Ten sutinka savo trečią brolij Joną. Kiek paseno kiekvienas iš brolių?

Praėjus 1.8 metams Lenny apsisuka ir tuo pačiu greičiu skrenda link nejudančio Arto. Jis **pamato**, kad brolis paseno 6 metais, kai Lenny praėjo tik 3.6 metai.

Tada Lenny ir Artas apsuka raketą ir kartu gržta į Žemę. Ten sutinka savo trečią broly Joną. Kiek paseno kiekvienas iš brolių?

Galima atlikti ir trečią eksperimentą: Žemėje pasilikęs Jonas praėjus 1.8 metams ir pats išskrenda pas brolius. Kokiu greičiu jis turi keliauti, kad praėjus dar 1.8 metams jis nepavėluotų ir prisijungtų prie Arto ir Lenny?