Matematinio modeliavimo gelbėjimo ratas sprendžiant aplinkos apsaugos problemas

R. Čiegis

Vilniaus Gedimino technikos universitetas
e-mail: rc@vgtu.lt

Spalio 12 d., 2021, Vilnius

Tiek globalieji klimato kaitos kontrolės uždaviniai, tiek ir lokalieji (netgi aktualesni) aplinkos apsaugos iššūkiai tampa pagrindiniais mūsų kasdieninio gyvenimo ir šiuolaikinės politikos klausimais.

Tiek globalieji klimato kaitos kontrolės uždaviniai, tiek ir lokalieji (netgi aktualesni) aplinkos apsaugos iššūkiai tampa pagrindiniais mūsų kasdieninio gyvenimo ir šiuolaikinės politikos klausimais.

Užtenka prisiminti paskutinius rinkimus į Vokietijos parlamentą. Jų metu įvairių partijų pozicija klimato kaitos ir aplinkosaugos klausimais buvo vienas svarbiausių diskusijų objektų ir lėmė nemažos dalies rinkėjų (ypač jaunimo iki 30 metų) pasirinkimą.

Tiek globalieji klimato kaitos kontrolės uždaviniai, tiek ir lokalieji (netgi aktualesni) aplinkos apsaugos iššūkiai tampa pagrindiniais mūsų kasdieninio gyvenimo ir šiuolaikinės politikos klausimais.

Užtenka prisiminti paskutinius rinkimus į Vokietijos parlamentą. Jų metu įvairių partijų pozicija klimato kaitos ir aplinkosaugos klausimais buvo vienas svarbiausių diskusijų objektų ir lėmė nemažos dalies rinkėjų (ypač jaunimo iki 30 metų) pasirinkimą.

Nemažiau svarbus yra aktyvus, patrauklus ir profesionalus šių problemų aptarimas bei analizė šiuolaikinėse studijų programose.

Tiek globalieji klimato kaitos kontrolės uždaviniai, tiek ir lokalieji (netgi aktualesni) aplinkos apsaugos iššūkiai tampa pagrindiniais mūsų kasdieninio gyvenimo ir šiuolaikinės politikos klausimais.

Užtenka prisiminti paskutinius rinkimus į Vokietijos parlamentą. Jų metu įvairių partijų pozicija klimato kaitos ir aplinkosaugos klausimais buvo vienas svarbiausių diskusijų objektų ir lėmė nemažos dalies rinkėjų (ypač jaunimo iki 30 metų) pasirinkimą.

Nemažiau svarbus yra aktyvus, patrauklus ir profesionalus šių problemų aptarimas bei analizė šiuolaikinėse studijų programose.

Už darbus, padedančius suprasti sudėtingų sistemų dinamiką (tame tarpe ir Žemės klimato kaitą) 3 mokslininkams paskirta 2021 metų fizikos Nobelio premija.

Jungtiniai operatoriai

Tegul turime Hilberto erdvę H, kurioje apibrėžta skaliarinė sandauga $(\cdot, \cdot)$.

Taip pat turime tiesinį operatorių

$$L: \quad H \to H.$$

Operatorius L^* yra jungtinis operatoriui L, jei

$$(Lg, h) = (g, L^* h), \quad g, h \in H.$$

Spręskime uždavinį

$$L\varphi = f.$$

Sakykime, kad mus domina funkcionalas

$$J = (\varphi, p),$$

kai užduota funkcija $p \in H$.

Spręskime uždavinį

$$L\varphi = f.$$

Sakykime, kad mus domina funkcionalas

$$J = (\varphi, p),$$

kai užduota funkcija $p \in H$.

Tą pačią funkcionalo J reikšmę galime apskaičiuoti ir taip

$$J = (\varphi^*, f),$$

kur φ^* yra jungtinio uždavinio

$$L^* \varphi^* = p.$$

sprendinys.

Pritaikykime šią metodiką taršos sklidimo ore modeliavimui.

Pritaikykime šią metodiką taršos sklidimo ore modeliavimui.

Tarkime, kad mus domina taršos koncentracijos pasiskirstymas 3D cilindre G, kurio apatinį pagrindą žymėsime Σ_0, viršutinį pagrindą, kuris yra aukštyje H, žymėsime Σ_H, o šoninį paviršių Σ.

Pritaikykime šią metodiką taršos sklidimo ore modeliavimui.

Tarkime, kad mus domina taršos koncentracijos pasiskirstymas 3D cilindre G, kurio apatinį pagrindą žymėsime Σ_0, viršutinį pagrindą, kuris yra aukštyje H, žymėsime Σ_H, o šoninį paviršių Σ.

Po ilgalaikių stebėjimų žinome vėjo greičių vektorių $\mathbf{u}(x, y, z, t) = (u, v, w)$, tenkinantį įprastines sąlygas

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}\mathbf{u} = 0, \\
&w = 0, \ \ \mathrm{kai} \ \ z = 0, \ z = H.
\end{aligned}$$

Pritaikykime šią metodiką taršos sklidimo ore modeliavimui.

Tarkime, kad mus domina taršos koncentracijos pasiskirstymas 3D cilindre G, kurio apatinį pagrindą žymėsime Σ_0, viršutinį pagrindą, kuris yra aukštyje H, žymėsime Σ_H, o šoninį paviršių Σ.

Po ilgalaikių stebėjimų žinome vėjo greičių vektorių $\mathbf{u}(x, y, z, t) = (u, v, w)$, tenkinantį įprastines sąlygas

$$\begin{aligned} &\mathrm{div}\mathbf{u} = 0, \\ &w = 0, \ \ \mathrm{kai} \ \ z = 0, \ z = H. \end{aligned}$$

Taip pat žinome aerozolių difuzijos koeficientą x ir y kryptimis, jis yra konstanta μ, bei vertikalia kryptimi $\nu = \nu(z)$.

Taršos skaidos (disipacijos) koeficientas σ.

Panaudodami masės tvermės dėsnį sudarome pagrindinę taršos sklidimo lygtį:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathrm{div} \mathbf{u} \varphi + \sigma \varphi = \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \Delta \varphi + f.$$

Panaudodami masės tvermės dėsnį sudarome pagrindinę taršos sklidimo lygtį:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{u}\varphi + \sigma\varphi = \frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu\Delta\varphi + f.$$

Mus domina periodiniai sprendiniai (pvz. periodiškumas vieneri metai)

$$\varphi(r, T) = \varphi(r, 0).$$

Kraštinės sąlygos

$$\varphi = 0, \quad r \in \Sigma,$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \alpha\varphi, \quad r \in \Sigma_0,$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad r \in \Sigma_H.$$

Apibrėžkime skaliarinę sandaugą

$$(g, h) = \int_0^T \left(\int_G gh \, dG \right) dt.$$

Tada suraskime operatorių, jungtinį šilumos taršos sklidimo operatoriui. Remsimės apibėžimu, periodiškumo ir kraštinėmis sąlygomis bei atliksime integravimo dalimis veiksmus

$$\int_0^T \left(\int_G h \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \mathrm{div} \mathbf{u} g + \sigma g - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial g}{\partial z} - \mu \Delta g \right) dG \right) dt$$
$$\int_0^T \left(\int_G g \left(-\frac{\partial h}{\partial t} - \mathrm{div} \mathbf{u} h + \sigma h - \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial h}{\partial z} - \mu \Delta h \right) dG \right) dt.$$

Taigi funkcionalo $J = (\varphi, p)$ reikšmę galime apskaičiuoti ir kitu būdu $J = (\varphi^*, f)$, kur φ^* yra jungtinio uždavinio sprendinys

$$-\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - \mathrm{div}\mathbf{u}\varphi^* + \sigma\varphi^* = \frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial \varphi^*}{\partial z} + \mu\Delta\varphi^* + p,$$

$$\varphi^*(r, T) = \varphi^*(r, 0),$$

$$\varphi^* = 0, \quad r \in \Sigma,$$

$$\frac{\partial \varphi^*}{\partial z} = \alpha\varphi^*, \quad r \in \Sigma_0,$$

$$\frac{\partial \varphi^*}{\partial z} = 0, \quad r \in \Sigma_H.$$

Naujos gamyklos statybos vietos parinkimas

Spręsime aktualų aplinkosaugos ir ekonomikos uždavinį

1. Reikia parinkti naujos gamyklos statybos vietą $(x_0, y_0) \in \Sigma_0$.

Naujos gamyklos statybos vietos parinkimas

Spręsime aktualų aplinkosaugos ir ekonomikos uždavinį

1. Reikia parinkti naujos gamyklos statybos vietą $(x_0, y_0) \in \Sigma_0$.
2. Gamyklos darbo metu į orą patenka aerozoliai (tarša)

$$f(r) = Q\delta(r - r_0), \quad r_0 = (x_0, y_0, h),$$

h yra dėl konstrukcinių reikalavimų fiksuotas išmetimų aukštis.

Naujos gamyklos statybos vietos parinkimas

Spręsime aktualų aplinkosaugos ir ekonomikos uždavinį

1. Reikia parinkti naujos gamyklos statybos vietą $(x_0, y_0) \in \Sigma_0$.

2. Gamyklos darbo metu į orą patenka aerozoliai (tarša)

$$f(r) = Q\delta(r - r_0), \quad r_0 = (x_0, y_0, h),$$

h yra dėl konstrukcinių reikalavimų fiksuotas išmetimų aukštis.

3. Būtina minimizuoti potencialią taršą specialioje sanitarinėje zonoje $\Sigma_1 \subset \Sigma_0$ ir cilindre virš jos G_1:

$$J = \int_0^T dt \left(a \int_{\Sigma_1} \varphi d\Sigma + b \int_{G_1} \varphi dG \right).$$

Apibrėžiame funkciją

$$p = \begin{cases} b + a\delta(z), & r \in G_1, \\ 0, & r \notin G_1. \end{cases}$$

Tada funkcionalą J galime užrašyti standartine forma

$$J = \int_0^T dt \int_G p\varphi dG.$$

Apibrėžiame funkciją

$$p = \begin{cases} b + a\delta(z), & r \in G_1, \\ 0, & r \notin G_1. \end{cases}$$

Tada funkcionalą J galime užrašyti standartine forma

$$J = \int_0^T dt \int_G p\varphi dG.$$

Sprendžiame optimizavimo uždavinį

$$\arg_{(x_0, y_0) \in \Sigma_0} \min J(r_0).$$

Funkcija φ yra sprendinys uždavinio

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{u}\varphi + \sigma\varphi = \frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu\Delta\varphi + Q\delta(r - r_0), \quad r \in G,$$

$$\varphi(r, T) = \varphi(r, 0),$$

$$\varphi = 0, \quad r \in \Sigma,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \alpha\varphi, \quad r \in \Sigma_0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad r \in \Sigma_H.$$

Funkcija φ yra sprendinys uždavinio

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{u}\varphi + \sigma\varphi = \frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu\Delta\varphi + Q\delta(r - r_0), \quad r \in G,\\
&\varphi(r, T) = \varphi(r, 0),\\
&\varphi = 0, \quad r \in \Sigma,\\
&\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \alpha\varphi, \quad r \in \Sigma_0,\\
&\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad r \in \Sigma_H.
\end{aligned}
$$

Norint surasti optimalią gamyklos vietą tenka labai daug kartų spręsti šį trimatį nestacionarų uždavinį.

Alternatyvi galimybė: sprendžiame jungtinį uždavinį tik vieną kartą

$$
\begin{aligned}
& -\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - \mathrm{div}\mathbf{u}\varphi^* + \sigma\varphi^* = \frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial \varphi^*}{\partial z} + \mu\Delta\varphi^* + p, \\
& \varphi^*(r, T) = \varphi^*(r, 0), \\
& \varphi^* = 0, \quad r \in \Sigma, \\
& \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} = \alpha\varphi^*, \quad r \in \Sigma_0, \\
& \frac{\partial \varphi^*}{\partial z} = 0, \quad r \in \Sigma_H
\end{aligned}
$$

ir apskaičiuojame funkcionalo J reikšmę visuose mus dominančiuose taškuose

$$
\begin{aligned}
J &= Q\int_0^T dt \int_G \delta(r - r_0)\varphi^* dG \\
&= Q\int_0^T \varphi^*(r_0, t)dt.
\end{aligned}
$$

Atkreipiame dėmesį į tai, kad abi funkcionalo J skaičiavimo galimybės yra svarbios ir optimalios skirtingų uždavinių sprendimui:

Atkreipiame dėmesį į tai, kad abi funkcionalo J skaičiavimo galimybės yra svarbios ir optimalios skirtingų uždavinių sprendimui:

1. Formulė $J = (p, \varphi)$ naudotina tada, kai esant fiksuotam taršos šaltiniui jo poveikį reikia įvertinti keliose srityse, tada užtenka vieną kartą išspręsti trimatį uždavinį su duotąja šaltinio funkcija f ir skaičiuoti funkcionalų reikšmes skirtingoms funkcijoms p_k, $k = 1, \dots, K$.

Atkreipiame dėmesį į tai, kad abi funkcionalo J skaičiavimo galimybės yra svarbios ir optimalios skirtingų uždavinių sprendimui:

1. Formulė $J = (p, \varphi)$ naudotina tada, kai esant fiksuotam taršos šaltiniui jo poveikį reikia įvertinti keliose srityse, tada užtenka vieną kartą išspręsti trimatį uždavinį su duotąja šaltinio funkcija f ir skaičiuoti funkcionalų reikšmes skirtingoms funkcijoms p_k, $k = 1, \ldots, K$.

2. Formulė $J = (f, \varphi^*)$ naudotina tada, kai fiksuotai apsaugos zonai p užtenka vieną kartą išspręsti jungtinį trimatį uždavinį ir funkcionalo reikšmę galime skaičiuoti įvairiems šaltiniams f.

Aptarsime dar vieno uždavinio sprendimo algoritmą.

Aptarsime dar vieno uždavinio sprendimo algoritmą.

Turime kelias sanitarines zonas G_k, $k = 1, \dots, K$. Reikia surasti zoną $\omega_0 \subset \Sigma_0$, kurioje galima statyti naują gamyklą ir visose sanitarinėse zonose būtų išpildyti leistinos taršos reikalavimai:

$$J_k = (p_k, \varphi) \le C_k, \quad k = 1, \dots, K.$$

Sprendžiame K atskirų jungtinio uždavinio atvejų

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial \varphi_k^*}{\partial t} - \mathrm{div}\mathbf{u}\varphi_k^* + \sigma\varphi_k^* = \frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial \varphi_k^*}{\partial z} + \mu\Delta\varphi_k^* + p_k, \\
&\varphi_k^*(r, T) = \varphi_k^*(r, 0), \\
&\varphi_k^* = 0, \quad r \in \Sigma, \\
&\frac{\partial \varphi_k^*}{\partial z} = \alpha\varphi_k^*, \quad r \in \Sigma_0, \\
&\frac{\partial \varphi_k^*}{\partial z} = 0, \quad r \in \Sigma_H
\end{aligned}
$$

apskaičiuojame funkcionalų J_k reikšmes $r_0 \in \Sigma_0$ taškuose

$$
J = Q\int_0^T \varphi_k^*(r_0, t)\, dt
$$

ir surandame zonas ω_k, kuriose pastačius gamyklą, taršos lygis atitinkamose sanitarinėse zonose Σ_k neviršija leistinos ribos.

Tada apskaičiuojame sritį

$$\omega_0 = \bigcap_{k=1}^{K} \omega_k,$$

kurioje galima statyti gamyklą.

Tada apskaičiuojame sritį

$$\omega_0 = \bigcap_{k=1}^{K} \omega_k,$$

kurioje galima statyti gamyklą.

Tolimesnis vietos parinkimas atliekamas atsižvelgus į ekologinius, ekonominius ir logistikos reikalavimus.