Topologinio rūšiavimo uždavinys

Raimondas Čiegis

Matematinio modeliavimo katedra, e-paštas: rc@vgtu.lt

Lapkričio 8 d., 2023

Šioje paskaitoje nagrinėsime dar vieną svarbų duomenų rūšiavimo uždavinį.

Šioje paskaitoje nagrinėsime dar vieną svarbų duomenų rūšiavimo uždavinį.

Kodėl dabar?

Šioje paskaitoje nagrinėsime dar vieną svarbų duomenų rūšiavimo uždavinį.

Kodėl dabar?

Ar jo sprendimui reikia kurti naujus algoritmus, kai jau žinome keletą optimalių rūšiavimo algoritmų?

Šioje paskaitoje nagrinėsime dar vieną svarbų duomenų rūšiavimo uždavinį.

Kodėl dabar?

Ar jo sprendimui reikia kurti naujus algoritmus, kai jau žinome keletą optimalių rūšiavimo algoritmų?

Atsakymai:

1. Kaip matysime, naujasis rūšiavimo uždavinys yra panašus į klasikinius rūšiavimo uždavinius, bet tas panašumas tėra paviršutiniškas.

2. Jo sprendimo algoritmus geriausia aprašyti grafų teorijos kalba. Ją naudosime ir kitose šio kurso paskaitose.

Aptarsime uždavinius, kuriuos dažnai tenka spręsti sudarant tvarkaraščius.

Aptarsime uždavinius, kuriuos dažnai tenka spręsti sudarant tvarkaraščius.

1. Transporto tvarkaraščiai, kai siekiame derinti skirtingų maršrutų grafikus, kad keleiviai galėtų naudotis jungiamaisiais reisais, o persėdimų trukmė būtų kuo trumpesnė.

Aptarsime uždavinius, kuriuos dažnai tenka spręsti sudarant tvarkaraščius.

1. Transporto tvarkaraščiai, kai siekiame derinti skirtingų maršrutų grafikus, kad keleiviai galėtų naudotis jungiamaisiais reisais, o persėdimų trukmė būtų kuo trumpesnė.

2. Daugelis šiuolaikinės ekonomikos ir skaitmeninių technologijų procesų susideda iš didelio kiekio tarpinių operacijų ir reikia garantuoti šių veiksmų atlikimo teisingą eiliškumą.

Aptarsime uždavinius, kuriuos dažnai tenka spręsti sudarant tvarkaraščius.

1. Transporto tvarkaraščiai, kai siekiame derinti skirtingų maršrutų grafikus, kad keleiviai galėtų naudotis jungiamaisiais reisais, o persėdimų trukmė būtų kuo trumpesnė.

2. Daugelis šiuolaikinės ekonomikos ir skaitmeninių technologijų procesų susideda iš didelio kiekio tarpinių operacijų ir reikia garantuoti šių veiksmų atlikimo teisingą eiliškumą.

3. Lygiagretieji skaičiavimai, kai skirtingi algoritmo veiksmai yra atliekami skirtinguose procesoriuose (branduoliuose). Vėl turime garantuoti skirtingų veiksmų atlikimo teisingą eiliškumą (priklausomybę). Pvz. taip generuojami vaizdai mobiliuose telefonuose, kai žiūrite filmuką ar žaidžiate įdomų internetinį žaidimą.

Tarkime, turime užduočių aibę

$$U = (u_1, u_2, \dots, u_N)$$

ir jų atlikimo eiliškumo sąryšių aibę

$$C = (u_{i_1} \prec u_{j_1},\ u_{i_2} \prec u_{j_2},\ \dots,\ u_{i_M} \prec u_{j_M}).$$

Tarkime, turime užduočių aibę

$$U = (u_1, u_2, \dots, u_N)$$

ir jų atlikimo eiliškumo sąryšių aibę

$$C = (u_{i_1} \prec u_{j_1},\ u_{i_2} \prec u_{j_2},\ \dots,\ u_{i_M} \prec u_{j_M}).$$

Čia sąryšys $u_{i_k} \prec u_{j_k}$ reiškia, kad užduotį u_{j_k} galėsime pradėti vykdyti tik tada, kai bus baigta u_{i_k} užduotis.

Tarkime, turime užduočių aibę

$$U = (u_1, u_2, \ldots, u_N)$$

ir jų atlikimo eiliškumo sąryšių aibę

$$C = (u_{i_1} \prec u_{j_1},\ u_{i_2} \prec u_{j_2},\ \ldots,\ u_{i_M} \prec u_{j_M}).$$

Čia sąryšys $u_{i_k} \prec u_{j_k}$ reiškia, kad užduotį u_{j_k} galėsime pradėti vykdyti tik tada, kai bus baigta u_{i_k} užduotis.

Reikia taip sutvarkyti aibę $U' = (u_1', u_2', \ldots, u_N')$, kad būtų įvykdyti visi aibės C sąryšiai, t.y. jei turime sąryšį $u_i' \prec u_j'$, tai $i < j$.

Pastebėsime, kad šie reikalavimai dažnai neapibrėžia vienintelės surūšiuotos aibės ir galime rasti keletą sprendinių.

Tokį uždavinį vadinsime topologiniu rūšiavimu.

Medelių sodinimas

Reikia pasodinti tris medelius. Pažymėkime d_j duobės iškasimo, p_j medelio sodinimo į duobę, u_j duobės užkasimo užduotis, sodinant j-ąjį medelį.

Medelių sodinimas

Reikia pasodinti tris medelius. Pažymėkime d_j duobės iškasimo, p_j medelio sodinimo į duobę, u_j duobės užkasimo užduotis, sodinant j-ąjį medelį.

Tada turime devynių užduočių aibę

$$U = \left(\, d_1,\, d_2,\, d_3,\, p_1,\, p_2,\, p_3,\, u_1,\, u_2,\, u_3 \,\right).$$

Medelių sodinimas

Reikia pasodinti tris medelius. Pažymėkime d_j duobės iškasimo, p_j medelio sodinimo į duobę, u_j duobės užkasimo užduotis, sodinant j-ąjį medelį.

Tada turime devynių užduočių aibę

$$U = \left(\ d_1,\ d_2,\ d_3,\ p_1,\ p_2,\ p_3,\ u_1,\ u_2,\ u_3\ \right).$$

Darbų eiliškumą nusako šie akivaizdūs sąryšiai:

$$C = \left(\ d_j \prec p_j,\ \ p_j \prec u_j,\ \ j = 1, 2, 3\ \right).$$

Egzistuoja kelios šio uždavinio topologiškai surūšiuotos aibės. Pavyzdžiui, galime sodinti kiekvieną medelį atskirai, tada gauname užduočių aibę

$$U' = (\, d_1,\, p_1,\, u_1,\;\; d_2,\, p_2,\, u_2,\;\; d_3,\, p_3,\, u_3 \,)\,.$$

Egzistuoja kelios šio uždavinio topologiškai surūšiuotos aibės. Pavyzdžiui, galime sodinti kiekvieną medelį atskirai, tada gauname užduočių aibę

$$U^{'} = (\ d_1,\ p_1,\ u_1,\ \ d_2,\ p_2,\ u_2,\ \ d_3,\ p_3,\ u_3\ )\ .$$

Darbus galime paskirstyti ir kitaip, pirmiausia turime iškasti visas duobes, į jas sodinti medelius, o paskui visas tris duobes užkasti (atskirų medelių eiliškumas vėl nesvarbus):

$$U^{''} = (\ d_1,\ d_2,\ d_3,\ \ p_3,\ p_2,\ p_1,\ \ u_2,\ u_3,\ u_1\ )\ .$$

Egzistuoja kelios šio uždavinio topologiškai surūšiuotos aibės. Pavyzdžiui, galime sodinti kiekvieną medelį atskirai, tada gauname užduočių aibę

$$U' = \big(\, d_1, \, p_1, \, u_1, \;\; d_2, \, p_2, \, u_2, \;\; d_3, \, p_3, \, u_3 \, \big) \, .$$

Darbus galime paskirstyti ir kitaip, pirmiausia turime iškasti visas duobes, į jas sodinti medelius, o paskui visas tris duobes užkasti (atskirų medelių eiliškumas vėl nesvarbus):

$$U'' = \big(\, d_1, \, d_2, \, d_3, \;\; p_3, \, p_2, \, p_1, \;\; u_2, \, u_3, \, u_1 \, \big) \, .$$

Visai nevykęs, bet deja pasitaikantis variantas, kai darbai pradedami vykdyti tokia tvarka $U^* = \big(\, d_1, \, d_2, \, d_3, \;\; u_2, \, u_3, \, u_1 \, \big) \, .$ Dvi brigados džiaugiasi, kad darbą atliko, bet rezultatas ...

Dabar pateiksime griežtesnį topologinio rūšiavimo uždavinio formulavimą. Turime orientuotąjį grafą $G = (V, E)$.
Čia V yra grafo viršūnių aibė, o E grafo briaunų aibė, briaunos turi kryptį.

Tarsime, kad grafe G nėra ciklų.

Dabar pateiksime griežtesnį topologinio rūšiavimo uždavinio formulavimą. Turime orientuotąjį grafą $G = (V, E)$.
Čia V yra grafo viršūnių aibė, o E grafo briaunų aibė, briaunos turi kryptį.

Tarsime, kad grafe G nėra ciklų.

Topologinio rūšiavimo uždavinys

Grafo viršūnes reikia sužymėti taip, kad kiekviena briauna jungtų mažesnio numerio viršūnę su didesnio numerio viršūne.

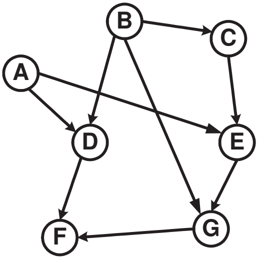
Dabar pateiksime griežtesnį topologinio rūšiavimo uždavinio formulavimą. Turime orientuotąjį grafą $G = (V, E)$.
Čia V yra grafo viršūnių aibė, o E grafo briaunų aibė, briaunos turi kryptį.

Tarsime, kad grafe G nėra ciklų.

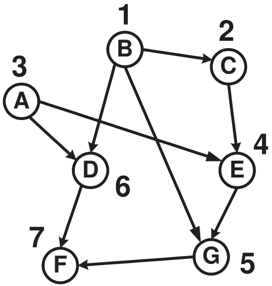
Topologinio rūšiavimo uždavinys

Grafo viršūnes reikia sužymėti taip, kad kiekviena briauna jungtų mažesnio numerio viršūnę su didesnio numerio viršūne.

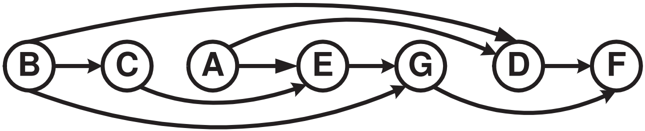
Topologinio rūšiavimo uždavinio sprendimo pavyzdys pateiktas paveiksle.



a) pradinis grafas



b) surūšiuotas grafas



c) viršūnių išdėstymas tiesėje.

Paieškos gilyn metodas

Matysime, kad šį naują ir sudėtingą rūšiavimo uždavinį galime išspręsti vien tik specialiai parinkdami grafo viršūnių aplankymo tvarką.

Paieškos gilyn metodas

Matysime, kad šį naują ir sudėtingą rūšiavimo uždavinį galime išspręsti vien tik specialiai parinkdami grafo viršūnių aplankymo tvarką.

Prisiminkite aritmetinės išraiškos spausdinimą prefix, infix ir postfix forma, kai tinkamai parinkome dvejetainio medžio (tai irgi grafas) viršūnių aplankymo rekursinį algoritmą.

Paieškos gilyn metodas

Matysime, kad šį naują ir sudėtingą rūšiavimo uždavinį galime išspręsti vien tik specialiai parinkdami grafo viršūnių aplankymo tvarką.

Prisiminkite aritmetinės išraiškos spausdinimą prefix, infix ir postfix forma, kai tinkamai parinkome dvejetainio medžio (tai irgi grafas) viršūnių aplankymo rekursinį algoritmą.

Paieškos gilyn strategija yra paprasta: iš duotosios grafo viršūnės einame į jai gretimą, paieškos metu dar neaplankytą grafo viršūnę.

Paieškos gilyn metodas

Matysime, kad šį naują ir sudėtingą rūšiavimo uždavinį galime išspręsti vien tik specialiai parinkdami grafo viršūnių aplankymo tvarką.

Prisiminkite aritmetinės išraiškos spausdinimą prefix, infix ir postfix forma, kai tinkamai parinkome dvejetainio medžio (tai irgi grafas) viršūnių aplankymo rekursinį algoritmą.

Paieškos gilyn strategija yra paprasta: iš duotosios grafo viršūnės einame į jai gretimą, paieškos metu dar neaplankytą grafo viršūnę.

Jei tokių viršūnių nėra, tai žengiame vieną žingsnį atgal ir ieškome naujo kelio iš tėvo viršūnės. Taip surandame visas viršūnes, kurias galima pasiekti iš pasirinktos pradinės viršūnės.

Jei grafas nėra jungusis, tai algoritmą kartojame, imdami naują dar neaplankytą pradinę viršūnę.

Jei grafas nėra jungusis, tai algoritmą kartojame, imdami naują dar neaplankytą pradinę viršūnę.

Kadangi paieškos metu pirmiausia aplankome labiausiai nutolusias viršūnes, tai metodą vadiname paieškos gilyn metodu (angl. *depth first search*).

Jei grafas nėra jungusis, tai algoritmą kartojame, imdami naują dar neaplankytą pradinę viršūnę.

Kadangi paieškos metu pirmiausia aplankome labiausiai nutolusias viršūnes, tai metodą vadiname paieškos gilyn metodu (angl. *depth first search*).

Dabar pateiksime visas paieškos gilyn algoritmo detales.

Kiekviena grafo viršūnė gali būti vienoje iš trijų būsenų (būsenas žymėsime skirtingomis spalvomis). Pradžioje visos viršūnės yra *neaplankytos* ir dažomos balta spalva.

Kiekviena grafo viršūnė gali būti vienoje iš trijų būsenų (būsenas žymėsime skirtingomis spalvomis). Pradžioje visos viršūnės yra *neaplankytos* ir dažomos balta spalva.

Kai viršūnė v aplankoma pirmą kartą, ji tampa *nenauja* ir dažoma pilka spalva. Laiką, kada ji tapo nenauja, saugome masyvo elemente $d(v)$ (angl. *discovered*).

Kiekviena grafo viršūnė gali būti vienoje iš trijų būsenų (būsenas žymėsime skirtingomis spalvomis). Pradžioje visos viršūnės yra *neaplankytos* ir dažomos balta spalva.

Kai viršūnė v aplankoma pirmą kartą, ji tampa *nenauja* ir dažoma pilka spalva. Laiką, kada ji tapo nenauja, saugome masyvo elemente $d(v)$ (angl. *discovered*).

Viršūnė nudažoma juoda spalva, kai išnagrinėjamos visos iš jos išeinančios briaunos, tokios viršūnės yra vadinamos *išsemtosiomis*. Laiko momentą, kada viršūnė tapo juoda, saugome masyvo elemente $f(v)$ (angl. *finished*).

Kiekviena grafo viršūnė gali būti vienoje iš trijų būsenų (būsenas žymėsime skirtingomis spalvomis). Pradžioje visos viršūnės yra *neaplankytos* ir dažomos balta spalva.

Kai viršūnė v aplankoma pirmą kartą, ji tampa *nenauja* ir dažoma pilka spalva. Laiką, kada ji tapo nenauja, saugome masyvo elemente $d(v)$ (angl. *discovered*).

Viršūnė nudažoma juoda spalva, kai išnagrinėjamos visos iš jos išeinančios briaunos, tokios viršūnės yra vadinamos *išsemtosiomis*. Laiko momentą, kada viršūnė tapo juoda, saugome masyvo elemente $f(v)$ (angl. *finished*).

Paieškos kelius įsimename masyve π, jo elemento $\pi(v)$ reikšmė yra viršūnė u, iš kurios pirmą kartą aplankėme v, t. y. $\pi(v) = u$.

Paieškos gilyn algoritmas

DepthFirstSearch (G)
begin
(1) **for** ($v \in V$) **do**
(2) spalva(v) = *balta*
(3) $\pi(v)$ = NULL
end do
(4) t = 0
(5) **for** ($u \in V$) **do**
(6) **if** (spalva(u) == *balta*) **then**
(7) DFS_Visit(u)
end if
end do
end DepthFirstSearch

DFS_Visit (u)
begin
(2) spalva(u) = *pilka*
(3) t = t +1, d(u) = t
(4) **for** ($v \in N(u)$) **do**
(5) **if** (spalva(v) == *balta*) **then**
(6) $\pi(v) = u$
(7) DFS_Visit(v)
end if
end do
(8) spalva(u) = *juoda*
(9) t = t +1, f(u) = t
end DFS_Visit

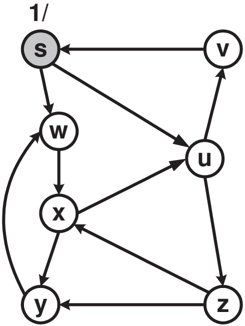
Algoritmo sudėtingumo įvertinimas

Kiekvienai viršūnei $v \in V$ vieną kartą vykdome *DFS_Visit* procedūrą ir algoritmas kartojamas tiek kartų, kiek šį viršūnė turi kaimynų. Todėl bendra topologinio rūšiavimo algoritmo aimtis yra

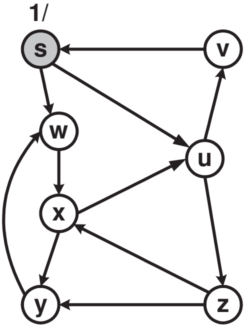
$$\Theta(|V| + |E|).$$

Imkime tokį orientuotą grafą:

Imkime tokį orientuotą grafą:



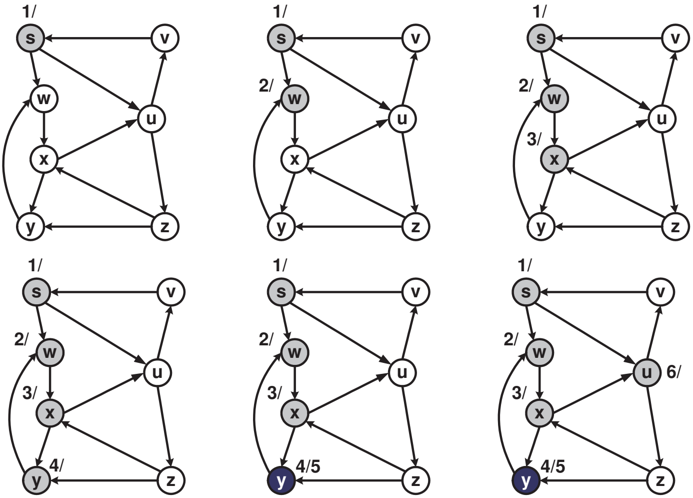
Imkime tokį orientuotą grafą:

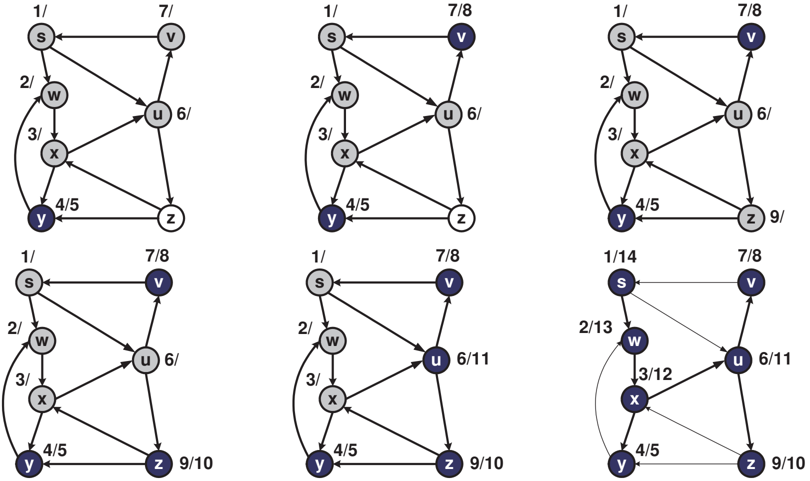


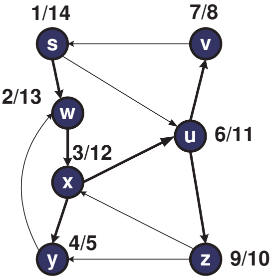
Ar jį galime topologiškai surūšiuoti?

Grafo viršūnes aplankome taikydami paieškos gilyn metodą. Viršūnių lankymo eiga po kiekvieno kreipinio į *DFS_Visit* funkciją pavaizduota paveiksle. Viršūnėse pateiktos $(d(v), f(v))$ reikšmės.

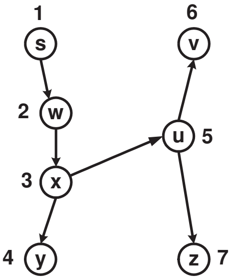
Grafo viršūnes aplankome taikydami paieškos gilyn metodą. Viršūnių lankymo eiga po kiekvieno kreipinio į *DFS_Visit* funkciją pavaizduota paveiksle. Viršūnėse pateiktos $(d(v), f(v))$ reikšmės.




1/
7/
s
v
2/
w
u
6/
3/
x
4/5
y
z
1/
7/8
s
v
2/
w
u
6/
3/
x
4/5
y
z
1/
7/8
s
v
2/
w
u
6/
3/
x
4/5
y
z
9/
1/
7/8
s
v
2/
w
u
6/
3/
x
4/5
y
z
9/10
1/
7/8
s
v
2/
w
u
6/11
3/
x
4/5
y
z
9/10
1/14
7/8
s
v
2/13
w
u
6/11
3/12
x
4/5
y
z
9/10



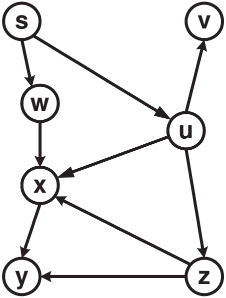
a) aplankytos viršūnės



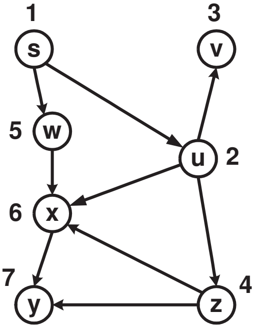
b) aplankymo eiliškumas

Norėdami gauti surūšiuotą viršūnių aibę, modifikuojame *DFS_Visit* procedūrą, jos pabaigoje viršūnę u įterpiame į tiesinio sąrašo pradžią (užtenka naudoti steką) :

DFS_VisitSort (u)
begin
(2) spalva(u) = *pilka*;
(3) t = t +1, d(u) = t;
(4) **for** ($v \in N(u)$) **do**
(5)   **if** (spalva(v) == *balta*) **then**
(6) $\pi(v) = u$;
(7)   DFS_VisitSort(v);
    end if
end do
(8) spalva(u) = *juoda*;
(9) t = t +1, f(u) = t;
(10) List.InsertHead (u);
end DFS_VisitSort



a)



b)