- Paskaita 8 -

Uždaviniai

1. 3 planetų judėjimas plokštumoje.

2. Keplerio dėsniai.

Raketos konstrukcijos pagrindimas

Matematinio modeliavimo rezultatai leidžia pasvarstyti konstrukcijos elementus/ sprendimus dar iki realių fizinių eksperimentų (generalinių testų). Išsiaiškinsime, kodėl ~~Žemė~~ aplink Žemę skriejančius palydovus/stotis išvedajis orbitą 3-pakopų raketos (o ne 1, 2 ar 4).

Sudarydami atitinkamą matematinį modelį (parinkdami, kokius procesus tarsime modeliuoti) aptarsime į kokius klausimus norėsime gauti atsakymus

1. Kokiu greičiu dirbtinis palydovas juda orbita aplink Žemę?

Atsakydami į šį klausimą sužinosime kokį greitį turi pasiekti raketa, kuria šis palydovas buvo iškeltas.

~~1.~~ Iš Niutono dėsnio: $ma = F$

žinome, kad judėjimo lygtyje kontroliuojame du parametrus

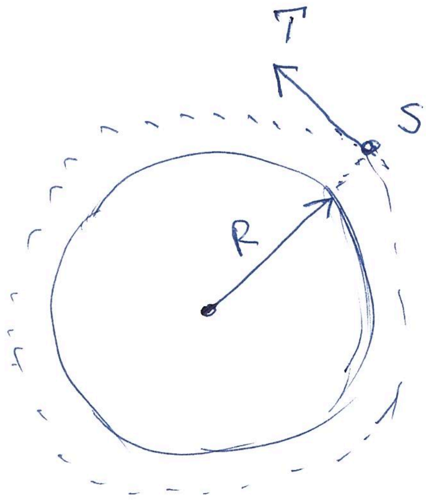
2. Kaip apibrėžiama raketos variklio galia, kaip ją galime padidinti (F - ~~jėga~~ poveikis)

3. Kaip apibrėžiama raketos masė m,

$\neq$

Sudarysime šių principinių procesų modelius, ~~atmesdami~~

1. Laikysime, kad Žemė yra taisyklingo rutulio formos, masė joje pasiskirsčiusi tolygiai



Aplink Žemę skrieja palydovas S. Jeigu jo neveiktų jokios kitos jėgos, tai, remiantis pirmuoju Niutono dėsniu, jis skrietų liestinės ST kryptimi.

Tačiau palydovą veikia Žemės traukos jėga, palydovas „krenta" ant Žemės.

Šią jėgą užrašysime dviem formomis

$$F = \gamma \frac{Mm}{r^2} \qquad F = \frac{km}{r^2}$$

r – atstumas nuo Žemės centro iki palydovo (teorema – jeigu kūnas rutulys, tai traukos jėga yra tokia pati, kaip ir tuo atveju, jei visa masė sukoncentruota centre).

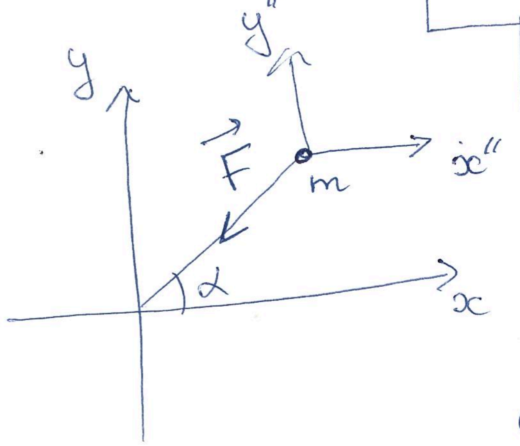
Žinome, kad Žemės traukos jėga jos paviršiuje (sunkio jėga) yra

$$F = mg, \qquad g = 9.81 \frac{m}{s^2}.$$

$$\frac{km}{R^2} = mg \Rightarrow \boxed{k = gR^2}$$

$$\boxed{R = 6400\ km = 6{,}4 \cdot 10^6\ m.}$$

$$\boxed{F = mg\left(\frac{R}{r}\right)^2}$$



$$m x''(t) = -F\cos\alpha$$

$$m y''(t) = -F\sin\alpha.$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \sin\alpha = \frac{y}{r}$$

$$x'' = -gR^2 \frac{x}{r^3}$$

$$y'' = -gR^2 \frac{y}{r^3},$$

$$r^2 = x^2(t) + y^2(t) = const$$

palydovas skrieja apskritimo trajektorija

Iš šios lygčių sistemos surasime greitį

$$v^2 = (x')^2 + (y')^2$$

-5-

$$x'' + \frac{gR^2}{r^3} x = 0 \qquad x(0) = r, \; x'(0) = 0$$

$$y'' + \frac{gR^2}{r^3} y = 0, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = v$$

$$x = A\cos(\lambda t) + B\sin(\lambda t)$$

$$x' = \lambda\left(-A\sin(\lambda t) + B\cos(\lambda t)\right).$$

$$x'(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$x(0) = r \Rightarrow A = r$$

$$x(t) = r\cos(\lambda t) \qquad \lambda^2 = \frac{gR^2}{r^3}$$

$$y(t) = r\sin(\lambda t)$$

$$\boxed{v^2 = (x'(t))^2 + (y'(t))^2 = \lambda^2 r^2 = \frac{gR^2}{r}.}$$

Palydovo greitis nepriklauso nuo m.

$$v = R\sqrt{\frac{g}{r}}$$

$$r = 600\ \text{km} \Rightarrow \boxed{v \approx 7.6\ \frac{\text{km}}{\text{s}}}$$

Lėktuvo greitis $850\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{850}{3600}\ \frac{\text{km}}{\text{s}} \approx 0{,}24\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$

Raketos variklio galingumo skaičiavimas

Fizinis procesas Raketos variklyje sudega kuras ir dujos išmetamos iš variklio (variklis yra raketos modelyje)

Dujų ~~išmetimo~~ judėjimo kryptis yra priešinga raketos judėjimo krypčiai.

Matematiniame modelyje naudosime impulso tvermės dėsnį

$$m(t)\,v(t) \equiv const$$

Laiko momentu t raketos impulsas

$$m(t)\,v(t).$$

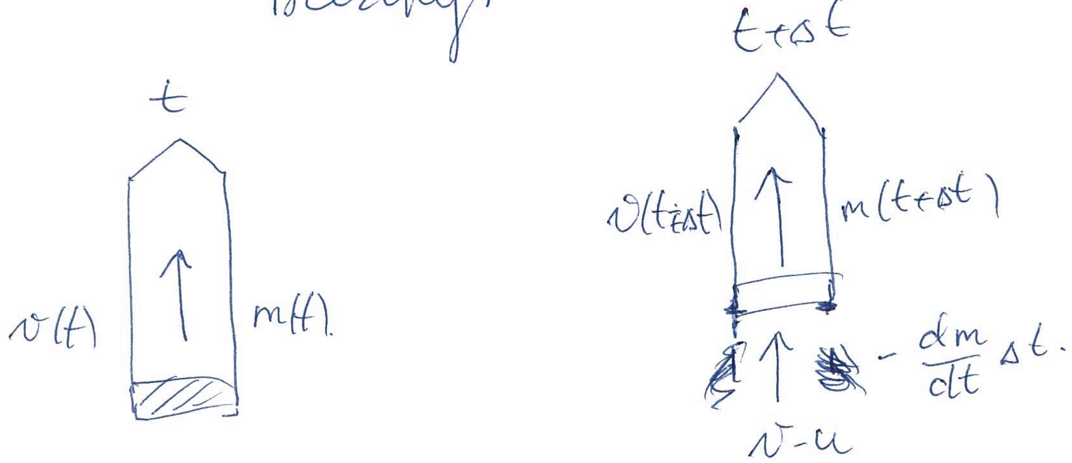
Laiko momentu $t+\Delta t$:

a) greitis pasikeitė $v(t+\Delta t)$

b) dalis kuro sudegė, pasikeitė raketos masė $m(t+\Delta t)$

c) dujos išmestos priešinga kryptimi pastoviu greičiu u (papildomas impulsas)

Brėžinys



Raketos impulsas momentu t	=	Raketos impulsas momentu t+Δt	+	Dujų perduotas impulsas momentu t+Δt.

Laiko momentu $t+\Delta t$ raketos masė sumažėjo iki $m(t+\Delta t)$. Šį pokytį įvertiname Teiloro skleidiniu

$$-\left(m(t+\Delta t)-m(t)\right) = -\frac{dm}{dt}\Delta t + O(\Delta t^2)$$

dujų masė

Žemės atžvilgiu dujos juda greičiu

$$v(t)-u.$$

$$\boxed{m(t)\,v(t) = m(t+\Delta t)\,v(t+\Delta t) - \frac{dm}{dt}\Delta t\,(v(t)-u) + O(\Delta t^2).}$$

Skleidžiame į $v(t+\Delta t)$ Teiloro eilute

$$m(t)\,v(t) = \left(m(t) + \frac{dm}{dt}\Delta t + O(\Delta t^2)\right) \times$$

$$\times\left(v(t) + \frac{dv}{dt}\Delta t + O(\Delta t^2)\right) - \frac{dm}{dt}(v-u)\Delta t$$

$$+ O(\Delta t^2)$$

Daliname iš Δt ir
Perėję prie ribos, gauname modelį

$$\boxed{m\frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt}u}$$

Aprašėme raketos judėjimą – jos greičio augimo dėsnį.

Prisiminkime Niutono dėsnį, taigi raketos variklio traukos jėga

$$F = -\frac{dm}{dt}u.$$

× { kuro sudeginimo greitis
dujų išmetimo greitis

$$\frac{dv}{dt} = -\underset{\text{konstanta}}{u}\,\frac{d\ln m}{dt}$$

$$\boxed{v(t) = \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{v_0} + u\ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right)}$$

pradinei masei ir masės laiko momentu t santykis!

Nagrinėkime sistemą <u>raketa-palydovas</u>

- raketos naudingas krovinys m_p
- raketos kuras m_F
- kuro bakas ir variklis m_S

$$m_0 = m_p + m_F + m_S$$

Kuras ir struktūrinė raketos dalis pabaigoje išmetami (atjungiami) todėl maksimalus greitis yra skaičiuojamas iš formulės

$$v = u \ln \left(\frac{m_0}{m_p + m_S} \right)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} m_F + m_S = m_N \\ \text{nenaudingas krovinys} \end{array}}$$

Skaičiuojame kokią dalį nenaudingo krovinio sudaro struktūrinė dalis ~~(jį nepagr~~ Jos išmetimas nepagreitina raketos

$$m_S = \lambda \, (m_F + m_S)$$
$$= \lambda \, (m_0 - m_p).$$

Paprastai

$$m_S \geq \frac{1}{8} m_F$$

(t.y sudaro ~~t~~kokią dalį konstrukcijos)

Tada gauname tokią greičio formulę

$$v = u \ln\left(\frac{m_0}{\lambda m_0 + (1-\lambda) m_p}\right)$$

Imkime kritinį atvejį $m_p = 0$

$$v = u \ln\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

Šiuolaikinėms raketoms $\lambda = \frac{1}{10}$,

$$u = 3 \frac{km}{s}$$

$$v_{max} = 7 \frac{km}{s}.$$

O dar neįvertinome oro pasipriešinimo, sunkio jėgos, naudingo krovinio svorio

Taigi tokia raketa negali pasiekti reikalingo greičio $v = 7{,}6 \frac{km}{s}$.

?? Ką daryti?

Raketa turėjo pagreitinti struktūrinę dalį iki maksimalaus greičio ir tik tada beveik atskirti balastą, bei variklį

? Išmesti kuro bakus, kai sudeginame kurą, kurį saugojome ~~tose~~ talpose.

Raketą konstruoti iš kelių pakopų.

Tai atliksime 3-pakopų raketos atveju.

$$m_0 = m_p + m_1 + m_2 + m_3$$

m_i yra i-tosios pakopos struktūrinė dalis (kuras + bakai + variklis)

1. Kai išdeginamas pirmosios pakopos kuras, raketa pasiekia greitį

$$v_1 = u \ln\left(\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3}\right)$$

2. Tada pašaliname pirmojo bloko struktūrinė dalis ir įjungiame antro bloko variklius

$$v_2 = v_1 + u \ln\left(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3}\right)$$

3. Paskutinis blokas paneštas įjungiamas, kai pašalinta antrojo bloko struktūrinė dalis

$$v_3 = v_2 + u \ln \left(\frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3} \right)$$

Kaip optimaliai parinkti blokų dydžius, kad esant fiksuotiems m_0, v, u, λ dydžiams naudingo krovinio m_p reikšmė būtų didžiausia

$$\frac{v}{u} = \ln \left(\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3} \right) \left(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3} \right) \times$$

$$\times \left(\frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3} \right)$$

$$\frac{m_0}{m_p} = \left(\frac{1 - \lambda}{P - \lambda} \right)^3, \qquad P = \exp\left(- \frac{v}{3u} \right)$$

Bendru atveju n pakopomis, 3 pakeičiame į n.

$\vartheta = 10{,}5 \ \frac{km}{s}$, $u = \cancel{3} \ \frac{km}{s}$, $\lambda = 0.1$.

$$\boxed{\frac{m_0}{m_p} = 77}$$

1 tona naudingo krovinio raketos svoris 77 t.

n	1	2	3	4	5
M	-	149	77	65	60

Taigi 3-pakopų raketa yra kompromisas tarp naudingo krovinio ~~dydžio~~ efektyvumo ir konstrukcijos paprastumo