Paskaita 6.

Funkcijos minimizavimas, kai uždėti nelygybių tipo apribojimai

$\mathbb{R}^n$ erdvėje reikia rasti f-jos $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ minimumo tašką, kai papildomai suformuluotos sąlygos (apribojimai)

$$g_j(x^0) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m,$$

o $x^0 \in \mathbb{R}^n$ yra minimumo taškas

$$\boxed{\begin{aligned} & f(x^0) = \min f(\vec{x}), \\ & g_j(\vec{x}) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}}$$

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$

Dažnai rašysime x bet turėdami

<u>Apibr.</u> Vektorius x, kuriam išpildyti apribojimai

$$g_j(x) \le 0, \quad j = 1, \dots, m \qquad \left(g(x) \le 0 \text{ žymėjimas} \right)$$

yra vadinamas <u>leistinu</u>. Tokie vektoriai sudaro <u>leistinų vektorių aibę</u>. [m nebūtinai tenkina nelygybę $m<n$]

Tada minimizuojame funkciją $f(x)$ ant leistinų ~~funkcijų~~ vektorių aibės X.

<u>Nauji uždaviai</u>

Dažniausiai yra neracionalu (arba net negalima) sudaryti <u>išreikštiniu</u> būdu leistinų ~~f~~ vektorių aibę X.

Kai kuriose taikymuose nagrinėjami ir leistinų vektorių apribojimai

$$\|x - x^*\| \le \varepsilon, \text{ kur } x^* \text{ yra}$$

<u>atraminis</u> taškas (tada mes domimės paieška tik to taško lokalioje aplinkoje)

Pirmiausia parodysime, kad nelygybių tipo apribojimus visada galima pakeisti lygybėmis (ekvivalentumas šių dviejų apribojimų tipų)

O pastarosioms jau galime taikyti Lagranžo daugiklių metodą.

Lema 1   Minimizavimo uždavinys (1)

$$f(x)\to\min$$
$$g_j(x)\le 0,\quad j=1,\dots,m \qquad (1)$$

yra ekvivalentus uždaviniui

$$f(x_1,\dots,x_n)\to\min$$
$$(2)\qquad g_j(x_1,\dots,x_n)+x_{n+j}^2=0,\quad j=1,2,\dots,m,$$

čia nauji kintamieji x_{n+j} yra vadinami laisvaisiais kintamaisiais.

Lemoje turime $\Longleftrightarrow$ tipo teiginį (tada ir tik tada).

Faktiškai parodysime,

~~Įrodymas~~

kad x° yra (1) uždavinio sprendi-

nys $\iff$ kai $X^\circ = (x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_n^\circ)$ rinkiny

$$(3) \quad x^\circ, \; x^\circ_{n+j} = [-g_j(x^\circ)]^{1/2}, \; j = 1, \dots, m$$

yra (2) uždavinio sprendinys

Būtinoji sąlyga

Tarkime, kad x° yra (1) uždavinio sprendinys (apribojimai-nelygybės), bet taškas (3) nėra (2) uždavinio sprendinys, t.y. $\exists (\tilde{x}, \tilde{x}_{n+1}, \dots, \tilde{x}_{n+m})$ toks, kad

$$f(\tilde{x}) < f(x^\circ),$$

$$g_j(\tilde{x}) + \tilde{x}_{n+j}^2 = 0.$$

Bet tada $g_j(\tilde{x}) = -\tilde{x}_{n+j}^2 \le 0$, tai prieštarauja x° apibr.! šis vektorius yra minimumo taškas uždaviniui su nelygybiniu apribojimu.

Pakankamumas:

Tarkime, kad $(x^0, x^0_{n+1}, \dots, x^0_{n+m})$ yra (2) uždavinio sprendinys (lygybių tipo apribojimai), bet egzistuoja toks taškas $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$, kad

$$f(x^*) < f(x^0),$$
$$g_j(x^*) \le 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Tada papildomai apibrėžiame laisvus parametrus:

$$x^*_{n+j} = [-g_j(x^*)]^{1/2}, \quad j = 1, \dots, m$$

Tada taškas $(x^*, x^*_{n+1}, \dots, x^*_{n+m})$ tenkina tokias sąlygas

$$f(x^*) < f(x^0),$$

$$g_j(x^*) + (x^*_{n+j})^2 = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Radome geresnį (2) uždavinio sprendinį (prieštaravimas).

<u>Ap.</u> Apribojimas $\boxed{g_i(x) \le 0}$ vadinamas <u>aktyviu</u> taške x^*, jeigu

$$\boxed{g_i(x^*) = 0}$$

Ištirsime gautas <u>būtinas minimumo</u> sąlygas.

Tarsime, kad $f(x), g_i(x) \in C^{(1)}$, $i = 1, \dots, m$.

Leistinasis taškas x^* yra paprastasis leistinas taškas, jeigu vektoriai

$$\frac{\partial g_{i_1}(x^*)}{\partial x}, \dots, \frac{\partial g_{i_k}(x^*)}{\partial x}$$

atitinkantys <u>aktyvius</u> apribojimus

$$1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le m.$$

yra tiesiškai nepriklausomi.

Jų yra nedaugiau, nei n!

- 7 - Lagranžo daugikliai.

$$F(x, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \times \left(g_i(x) + x_{n+i}^2\right)$$

Skaičiuojame Lagranžo daugiklius (stacionarų tašką)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_j} + \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \\[2ex] \lambda_i x_{n+i} = 0, \quad i = 1, \ldots, m \\[2ex] g_i(x) + x_{n+i}^2 = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

laisvųjų param

$$\lambda_i g_i(x) + \underbrace{(\lambda_i x_{n+i})}_{0} x_{n+i} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_i g_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, m.}$$

(neaktyvus)

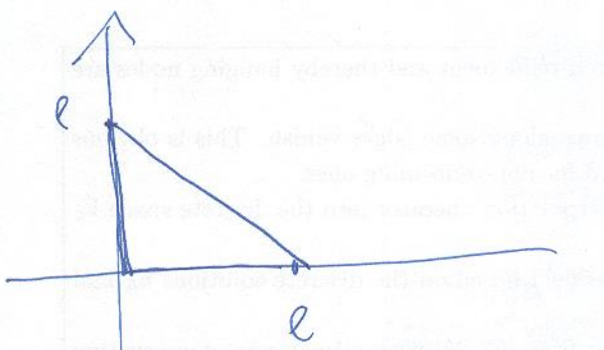
Jeigu $g_i(x^*) \neq 0$, tai $\lambda_i = 0$.

Nagrinėkime tokį uždavinį

$$f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{36} x_1^2 - \frac{1}{16} x_2^2$$

$$g_1(x) := x_1 + x_2 - l = 0.$$

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0$$



Sritis uždara ir aprėžta, funkcija $f(x)$ yra tolydi, tai minimumas taške x^0 turi J.

Turime apribojimus

$$\begin{cases} g_1(x) = 0 & x_1 + x_2 - l = 0 \\ g_2(x) \leq 0 & -x_1 \leq 0 \\ g_3(x) \leq 0 & -x_2 \leq 0. \end{cases}$$

Užrašome Lagranžo f-ją

$$F(x) = -\frac{\sqrt{3}}{36}x_1^2 - \frac{1}{16}x_2^2 + \lambda_1(x_1 + x_2 - l) - \lambda_2 x_1 - \lambda_3 x_2.$$

Stacionarūs taškai:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1}: & -\frac{\sqrt{3}}{18}x_1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2}: & -\frac{1}{8}x_2 + \lambda_1 - \lambda_3 = 0. \\ \lambda_2 g_2 = 0 & \lambda_2 x_1 = 0 \\ \lambda_3 g_3 = 0 & \lambda_3 x_2 = 0. \\ g_1(x) = 0 & x_1 + x_2 - l = 0. \end{cases}$$

Patikriname, kurie iš apribojimų apibrėžia paprastus leistinus taškus

Vektoriai

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial g_2}{\partial x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial g_3}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Visi trys vektoriai yra poromis tiesiškai nepriklausomi.

Todėl aktyvios poros apribojimų poros

$$\begin{cases} g_1(x) = 0 \\ g_2(x) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} g_1(x) = 0 \\ g_3(x) = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} g_2(x) = 0 \\ g_3(x) = 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{\mathrm{I}}$ $\qquad$ $\underline{\mathrm{II}}$

negali būti nes $g_1(x)$ yra aktyvus!

$$\text{I}\quad \begin{cases} x_1 + x_2 = l \\ x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = l \Rightarrow \boxed{S(x) = -f(x) = \frac{1}{16} l^2}$$

$$\text{II}\quad \begin{cases} x_1 + x_2 = l \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = l \Rightarrow S(x) = \frac{\sqrt{3}}{36} l^2$$

Didesnis plotas gaunamas, kai $x_2 = l$ (tik kvadratas)

Jei $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ (nėra atvejų apribojimai) tai jau išnagrinėjome anksčiau ir radome $\min S(x)$.