Paskaita 10 (pagrindinė algebros teorema)

Polinomų virš lauko žiedas

Nagrinėkime pvz skaičių laukus

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ arba multiplikatyvę
laukai! liekanų grupę $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$,
kur p yra pirminis skaičius

(Laukas - yra komutatyvus žiedas, turintis 1 ir $\forall a \neq 0$ turi atvirkštinį a^{-1}).

Def. Tegul R yra komutatyvus žiedas turintis $1 \neq 0$. Tada vieno kintamojo polinomu virš žiedo R vadiname išraišką

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

kur x yra kintamasis, o $a_0, \dots, a_n \in R$ yra žiedo R elementai. n - yra polinomo eilė, jei $a_n \neq 0$.
$n = \deg(f)$

Visų polinomų virš R aibė yra žymima $R[x]$.

Jeigu $x \in R$ tai polinomas $f(x)$ irgi yra R elementas!

$\in \mathbb{Z}[x]$

Pav. $2x^3+x+3$, x, 3 yra 3-ios, pirmos, nulinės eilės.

Bet galime nagrinėti ir kitą interpretaciją (funkcinę)

<u>Def.</u> Jeigu $r \in R$, tai

$$f(r) = a_n r^n + \dots + a_1 r + a_0$$

yra vadinama polinomo $f(r)$ reikšme f elemente r.

Jeigu $f(r) = 0$, tai r yra vadinamas polinomo šaknimi (zero of f).

Pav. $f(x) = 2x^3 + x + 1$

$f(-1) = -2.$

Nagrinėkime žiedą $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Jis turi du elementus 0 ir 1.
(ekvivalentumo klases!)

Tada $g(x) = x^2 + 1 \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[x]$.

$g(1) = 2 \equiv 0 \mod 2$.

Taigi 1 yra polinomo $g(x)$ šaknis.

Apibrėžkime dviejų polinomų sumą

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$$

Tarkime, kad $n \geq m$, tada imkime

$$b_{m+1} = \dots = b_n = 0.$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n$$

$$\boxed{(f+g)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n}$$

Vėl gauname polinomą

Pav. $f(x) = x^2 + x + 1$

$g(x) = x^3 + 2x + 3$

$$(f+g)(x) = x^3 + x^2 + 3x + 4.$$

Def. Dviejų polinomų sandauga

$$(fg)(x) = c_{n+m} x^{n+m} + \dots + c_1 x + c_0$$

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}, \quad 0 \le k \le n+m.$$

Pastebime, kad koef a_i ar b_i, kurie neapibrėžti, juos laikome lygiais 0.

Pav.

$$(fg)(x) = x^5 + x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 5x + 3.$$

(Polinomo reikšmės greitas sk. algoritmas)

Vėl gavome polinomą.

Sumos ir sandaugos operacijos komutuoja.

$(R[x], +, \cdot)$ yra žiedas (komutatyvus) su vienetu 1 (nulinės eilės polinomas)

Polinomai virš lauko K sudaro žiedą, kuriame veiksmai atliekami panašiai kaip ir skaičių laukuose.

T1. $K[x]$ neturi nulio daliklių.

$\triangleleft$ $\deg(fg) = \underset{\geq 1}{\deg f} + \underset{\geq 1}{\deg g} \geq 2$, todėl negali būti lygus 0, kuris yra nulinės eilės polinomo 0 laipsnis $\triangleright$

T2. Jeigu $f, g \in K[x]$, $g \neq 0$, tai $\exists$ vienareikšmiškai apibrėžti polinomai $q, r \in K[x]$, tokie kad

$$f = qg + r$$

ir $\deg r < \deg g$ arba $r = 0$

$\triangleleft$ Mat. indukcijos metodu parodysim kad $\exists!$ spr.

-6-

Iš įrodymo taip pat gaunamas konstruktyvus dalybos algoritmas (~~x pasirin~~)

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0$$

$$n \geq m$$

$$r = f, \quad q = 0$$

while ($r \neq 0$ & ($\deg r \geq \deg g$)) {

$$h(x) = \frac{a}{b_m} x^{\deg r - \deg g}$$

polinomo

$a = r(x)$ (koef. prie didž. laipsnio) leading coeff

vyriausias koeficientas)

$$r = r - hg$$

$$q = q + h$$

q

Pav. 1

$$f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 5x + 6$$

$$g(x) = 2x^2 + x + 1.$$

K - ~~...~~ realiųjų skaičių laukas.

1ž. $r(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 5x + 6$

$q(x) = 0$

1ž. $h(x) = \frac{1}{2}x^2$

$$(hg) = x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2$$

2ž. $r(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 5x + 6$

$q(x) = \frac{1}{2}x^2$

2ž. $h(x) = \frac{5}{4}x$

-

- ..

Pav. 2 $K = \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$.

$$f(x) = x^3 + x + 1$$

$$g(x) = x^2 + x$$

Elemento atstovai
pasirenkami
neneigiami

$$r = x^3 + x + 1$$

$$q = 0$$

1 ž. $h(x) = x$

$$(hg)(x) = x^3 + x^2$$

$$r = -x^2 + x + 1 = x^2 + x + 1$$

$$q = x$$

$\deg r = \deg g$, reikia dar vieno žing.

2 ž. $h(x) = 1$

$$(hg)(x) = x^2 + x$$

$$\boxed{\begin{aligned} r &= 1 \\ q &= x+1 \end{aligned}}$$

$$x^3 + x + 1 = (x^2 + x)(x+1) + 1$$

T3. Jeigu $f(x) \neq 0 \in K[x]$, ir $a \in K$ yra polinomo šaknis, t.y.

$$f(a) = 0,$$

tai $f(x) = (x-a)\,q(x)$, $q \in K[x]$.

◁ $f(x) = (x-a)\,q(x) + r(x)$, kur

$r = 0$ arba $\deg r < 1$ (nulinės eilės polinomas)

(nes $\deg(x-a) = 1$)

$0 = f(a) = r \Rightarrow f(x) = (x-a)\,q(x)$. ▷

Išvada. Polinomas $f(x)$ turi ne daugiau nei $\deg f$ šaknų.

Imkime $K = \mathbb{R}$.

$f(x) = x^3 + x$ turi vieną realią šaknį $x = 0$, nes lygtis

$x^2 + 1 = 0$ sprendinių neturi.